ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРІИ.

КУРСЪ СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ.

СОСТАВИЛИ

Д. Гика и А. Муромцевъ.

Преподаватели Московской 6-й Гимназіи.



ЦѢНА 1 РУБ.

ИЗДАНІЕ РЕДАКЦІИ
СТѢННАГО КАЛЕНДАРЯ
М. Д. НАУМОВА.

МОСКВА.
Типографія М. Н. Лаврова и К°.
Леонтьевскій переул., домъ № 14.
1879.





Преподаваніе геометріи въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ имѣетъ двѣ цѣли: во первыхъ — направить умственныя силы ученика на путь строго-логическаго мышленія, воспитать въ немъ такое сознаніе, по которому, удовлетворяясь только истиннымъ доказательствомъ, онъ считалъ бы абсолютно вѣрнымъ только то, что дѣйствительно доказано, и признавалъ бы преимущество совершенно правильныхъ отвлеченныхъ умозаключеній надъ опытными выводами; во вторыхъ — сообщить ученику положительныя знанія элементовъ этой науки, какъ матеріалъ, необходимый для дальнѣйшаго изученія ея и полезный по своимъ приложеніямъ къ разнымъ отраслямъ человѣческаго знанія.

Такъ какъ главная задача среднихъ учебныхъ заведеній— дать учащемуся въ нихъ юношеству общее научное образованіе, открывающее путь къ образованію дальнѣйшему—спеціальному, то, ставя на первый планъ первую изъ вышеуказанныхъ цѣлей преподаванія геометріи, мы видимъ средства къ достиженію этой цѣли не столько въ пріобрѣтеніи познаній геометрическихъ истинъ, сколько въ изученіи способовъ ихъ доказательствъ и въ систематичности изложенія науки. На основаніи этого мы расположили Плоскую Геометрію по способамъ геометрическихъ доказательствъ, что составляетъ главное отличіе нашего курса отъ другихъ, и вездѣ ставили на первый планъ общую стройность и теоретическій характеръ изложенія, при которомъ послѣдовательность предметовъ являлась бы слѣдствіемъ необходимости.

Строгость геометрическихъ доказательствъ научаетъ учащагося быть крайне осмотрительнымъ въ выводахъ и заключеніяхъ. Способы и внутренній характеръ разсужденій, употребляемыхъ въ этихъ доказательствахъ, служатъ образцами правильнаго мышленія. Систематичность всего ученія, доставляя удовольствіе учащемуся, научаетъ его порядку, въ которомъ должны слѣдовать идеи размышляющаго. Это сознавалъ знаменитый греческій философъ Платонъ (жившій въ IV вѣкѣ до Р. X.), который, по сказанію Діогена Лаэртскаго, написалъ надъ дверями своей философской школы: „*да не входитъ сюда не знающій геометріи*“ («Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μου τὴν στέγην»), и однажды желавшему у него учиться философіи, но не знавшему ни астрономіи, ни геометріи, сказалъ: „*ступай вонъ, ты не имѣешь орудія для распознанія сущности философіи*“ («Πορεύου· λαβὰς γὰρ οὐκ ἔχεις φιλοσοφίας»).

Въ самомъ началѣ учащійся знакомится съ опытными истинами (аксіомами), лежащими въ основаніи всего геометрическаго ученія, и съ основными предметами этого ученія, а именно: съ плоской поверхностью и двумя линіями, прямой и окружностью; причемъ указанныя линіи, какъ плоскія, помѣщаются на безконечной плоскости и изучаются сначала на ней, а потомъ въ пространствѣ.

Помѣщенныя на плоскость прямыя и окружности, пересѣкаясь взаимно, дѣлятся на различныя части и отдѣляютъ опредѣленныя и неопредѣленныя части этой плоскости (геометрическія фигуры и углы). Эти части плоскостей и линій представляютъ собою величины, и въ геометріи изучаются: 1) условія равенства или неравенства сказанныхъ величинъ, 2) взаимное отношеніе ихъ другъ къ другу и 3) свойства одной величины по свойствамъ другой, измѣняющейся и приближающейся къ первой, какъ угодно близко, во время своего измѣненія. Соотвѣтственно съ этимъ ученіе о прямой и окружности на плоскости производится тремя способами: способомъ наложенія, способомъ пропорцій и способомъ предѣловъ.

Далѣе, пользуясь всѣми тремя способами вмѣстѣ, мы изложили въ строго систематическомъ порядкѣ: 1) ученіе о взаимномъ положеніи прямыхъ и плоскостей въ пространствѣ; 2) ученіе о тѣлахъ, ограниченныхъ плоскостями (многогранники), и 3) ученіе о тѣлахъ, ограниченныхъ поверхностями, образованными движеніемъ въ пространствѣ прямой (цилиндръ и конусъ) и окружности (шаръ).

Общій характеръ аксіомъ сохраненъ тотъ, какой данъ въ „Эвклидовыхъ элементахъ“, причемъ 11-я Эвклидова аксіома замѣнена новою 11-ою аксіомою простѣйшею (большій уголъ не можетъ лежать внутри меньшаго). Прямая линія опредѣлена такъ, какъ это дѣлаетъ Дюгамель въ сочиненіи Des Méthodes dans les sciences de raisonnement и Остроградскій въ своей геометріи.

Въ соотвѣтствіе съ опредѣленіемъ прямой приведено нами опредѣленіе плоскости и подробно развиты основанія этого новаго опредѣленія подобно тому, какъ это сдѣлано для прямой Дюгамелемъ. Какъ въ опредѣленіи прямой, такъ и въ опредѣленіи плоскости, мы усматриваемъ съ одной стороны—основное характеристическое свойство опредѣляемаго, аналитическое значеніе котораго легко понять, а съ другой стороны—простѣйшее выраженіе идеи Эвклидовыхъ опредѣленій, выраженныхъ темно словами: „*прямая линія есть равнолежащая линія между двумя концами ея*“, „*плоскость та поверхность, которая между своими предѣлами равно лежитъ*“.

Въ способѣ пропорцій мы выяснили путемъ геометрическимъ истинную идею прямой и обратной пропорціональности величинъ соотвѣтственно аналитическому представленію этихъ идей въ видѣ формулъ $y=kx$ и $y=\frac{k}{x}$, гдѣ k—постоянное, а x и y зависимыя перемѣнныя.

Способъ предѣловъ мы не сочли возможнымъ излагать въ обще-принятомъ порядкѣ, начиная съ отвлеченныхъ опредѣленій и общихъ теоремъ, потому что такое изложеніе

считаемъ не доступнымъ уму учащагося. Вслѣдствіе этого какъ понятія, такъ и свойства перемѣнныхъ и ихъ предѣловъ мы разъяснили сперва на частныхъ примѣрахъ, взятыхъ изъ предшествующихъ главъ геометріи и затѣмъ уже обобщили, придавая такимъ образомъ конкретность этимъ труднымъ для учениковъ понятіямъ, и чрезъ это дали возможность вполнѣ освоиться съ ними. Всѣ же трудности геометрическихъ представленій, относящихся къ измѣренію кривой линіи—прямою, или кривой поверхности—квадратомъ, или тѣла, ограниченнаго кривою поверхностью,—кубомъ, сведены къ опредѣленіямъ таковыхъ мѣръ. Впрочемъ не желающіе изучать способа предѣловъ могутъ пропустить эту теорію, разсматривая окружность, какъ периметръ правильнаго многоугольника съ безконечно-большимъ числомъ сторонъ; и слѣдовательно цилиндръ, какъ призму, а конусъ, какъ пирамиду съ безконечнымъ числомъ боковыхъ граней, и наконецъ—шаръ, какъ тѣло вращенія, происшедшее отъ обращенія правильнаго многоугольника съ безконечно-большимъ числомъ сторонъ около оси, проходящей чрезъ центръ этого многоугольника.

Въ предлагаемомъ учебникѣ мы помѣстили задачи, рѣшенія которыхъ считаемъ необходимымъ изучить учащимся. Собраніе же задачъ, расположенныхъ примѣнительно къ этому курсу, будетъ издано въ скоромъ времени.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Предварительныя понятія.

Плоская Геометрія.

Способъ наложенія.

Способъ пропорцій.

Способъ предѣловъ.

Геометрія въ пространствѣ.

Предварительныя понятія.

Предметъ Геометріи. Истины, на которыхъ она основана.

§ 1. Геометрія есть ученіе о частяхъ пространства. Пространство не имѣетъ границъ, оно нигдѣ не кончается и потому говорятъ: пространство безгранично, безпредѣльно, безконечно.

§ 2. Всякое тѣло занимаетъ ограниченную, опредѣленную часть всего безконечнаго пространства. Самое тѣло называется тѣломъ физическимъ, а пространство, которое оно занимаетъ (мѣсто, занимаемое физическимъ тѣломъ), называется тѣломъ геометрическимъ. Итакъ *геометрическое тѣло есть опредѣленная часть пространства, которую занимаетъ тѣло физическое.*

§ 3. Вообразимъ себѣ одно геометрическое тѣло безъ тѣла физическаго. То, что отдѣляетъ геометрическое тѣло отъ всего безконечнаго пространства, т. е. то, что составляетъ границы тѣла, предѣлы его, называется поверхностью. Итакъ, *поверхность есть предѣлъ тѣла, граница тѣла.*

§ 4. Вообразимъ себѣ одну поверхность безъ тѣла геометрическаго. Всякая часть поверхности имѣетъ границу; то, что ограничиваетъ такую часть поверхности, что опредѣляетъ ее, называется линіей. Итакъ, *линія есть предѣлъ поверхности, граница поверхности.*

Можно тоже назвать линіей мѣсто пересѣченія двухъ поверхностей.

§ 5. Наконецъ вообразимъ себѣ какую нибудь линію въ пространствѣ безъ поверхности. Всякая часть линіи имѣетъ границы, концы ея; каждый изъ концовъ линіи, т. е. то, чѣмъ граничитъ линія, называется точкою. Итакъ, *точка есть предѣлъ линіи, границы ея.*

Можно тоже назвать точкою мѣсто пересѣченія двухъ линій.

§ 6. Въ геометрическомъ тѣлѣ обыкновенно различаютъ три протяженія, называемыя измѣреніями, а именно: протяженіе въ длину, ширину и третье протяженіе называютъ или толщиною, или глубиною, или высотою; такимъ образомъ говорятъ: толщина книги, глубина ямы, высота дома.

Поверхность не имѣетъ толщины и въ ней обыкновенно различаютъ два измѣренія: въ длину и ширину. Линія не имѣетъ ни толщины, ни ширины, а имѣетъ только одно измѣреніе—въ длину.

Точка не имѣетъ ни одного измѣренія.

§ 7. Если представимъ себѣ точку двигающеюся въ пространствѣ, то путь, пройденный ею, есть линія, и притомъ двигающаяся точка можетъ описать всякую линію, такъ какъ она можетъ какъ угодно двигаться.

Если какая нибудь линія будетъ двигаться въ пространствѣ, то путь, ею пройденный, будетъ поверхность, видъ которой будетъ зависѣть отъ того, какая линія двигается и какъ она двигается.

Наконецъ, если ограниченная поверхность будетъ двигаться, то путь, ею пройденный, будетъ тѣло, видъ котораго зависитъ отъ того, какая поверхность двигается и какъ она двигается.

Если предѣлы геометрическаго тѣла, т. е. поверхности его, будутъ раздвигаться, то тѣло будетъ увеличиваться; когда эти предѣлы будутъ на очень большомъ другъ отъ друга разстояніи, тѣло будетъ очень велико; когда же предѣлы уйдутъ въ безконечность—тѣло займетъ все безпредѣльное пространство.

§ 8. Два геометрическія тѣла или двѣ поверхности, или двѣ линіи, называются *равными между собою*, если можно одно изъ нихъ совмѣстить съ другимъ такъ, чтобы они совпали во всѣхъ частяхъ своихъ другъ съ другомъ. Въ противномъ же случаѣ они не равны между собою.

§ 9. Геометрическое тѣло, поверхность тѣла и границу поверхности, т. е. линію, можно представить себѣ большими или меньшими, увеличивающимися или уменьшающимися. Слѣдовательно геометрическія тѣла, поверхности, ихъ ограничивающія, и линіи, ограничивающія поверхности, суть величины, потому что величиною называется все, что можно представить себѣ увеличивающимся или уменьшающимся. Эти

величины изучаются въ геометріи, причемъ излагаются и способы выражать каждую изъ нихъ числомъ.

§ 10. Все геометрическое ученіе основано на нѣсколькихъ простыхъ и совершенно очевидныхъ истинахъ, которыя люди узнали изъ наблюденій. Эти истины называются *аксіомами* (ἀξίωμα), такъ что аксіома есть истина сама по себѣ очевидная, въ справедливости которой нельзя имѣть сомнѣнія.

Аксіомы суть слѣдующія:

1. *Величины, равныя одной и той же, или равнымъ, равны между собою.*

2. *Если къ равнымъ величинамъ прибавимъ поровну, или отъ равныхъ отнимемъ поровну, то получимъ равныя величины.*

3. *Если къ неравнымъ величинамъ прибавимъ поровну или отъ неравныхъ отнимемъ поровну, то получимъ неравныя величины и притомъ отъ большей получится большая величина.*

4. *Равнократныя равныхъ величинъ, а также и одинаковыя части равныхъ величинъ, суть равныя величины.*

5. *Равнократныя неравныхъ величинъ, а также и одинаковыя части неравныхъ величинъ, суть неравныя величины и притомъ отъ большей получится большая величина.*

6. *Если отъ равныхъ величинъ отнимемъ неравныя, то получимъ неравныя величины и притомъ та будетъ больше, которая получилась, отнимая меньшую величину.*

7. *Всякую величину всегда можно замѣнить равной ей другой величиной.*

8. *Цѣлая величина болѣе своей части.*

9. *Если величина ни больше и ни меньше другой, то она равна ей. Если величина ни равна и ни меньше другой, то она больше. Если величина ни равна и ни больше другой, то она меньше.*

10. *Между всякими двумя точками есть только одно кратчайшее разстояніе.*

§ 11. Рядомъ совершенно правильныхъ умозаключеній, основанныхъ на аксіомахъ, выводятся другія геометрическія истины, называемыя *теоремами* (θεώρημα), такъ что *теорема есть истина, справедливость которой обнаруживается нѣкоторымъ разсужденіемъ.*

Разсужденіе, которымъ обнаруживается справедливость теоремы, называется *доказательствомъ* теоремы.

Прямая линія.

§ 12. Черезъ двѣ данныя точки въ пространствѣ можно провести множество разныхъ линій. Вообразимъ себѣ, что черезъ двѣ данныя точки проведена какая нибудь линія, то можетъ быть два случая:

1) или линія, которую мы провели, можетъ быть такая, какихъ еще множество можно провести черезъ тѣже двѣ точки;

2) или такая, какихъ болѣе одной чрезъ тѣ-же точки провести невозможно,—это та, которую называютъ *прямою* линіей.

Напр. если линія будетъ имѣть видъ черт. 1, то легко видѣть, что черезъ тѣ же двѣ точки А и В можно провести множество линій одинаковыхъ съ нею. Въ самомъ дѣлѣ: представимъ себѣ, что эта линія вращается въ то время, какъ двѣ точки ея А и В остаются неподвижными, то каждое изъ положеній линіи даетъ другую линію, одинакую съ данной. Если же линія будетъ имѣть видъ чер. 2, то во время вращенія положеніе ея не измѣняется и чрезъ точки А и В другой линіи, одинакой съ начертанной, провести невозможно—это прямая линія.

Чер. 1.

В А

Чер. 2.

А В

Прямую линію всегда должно представлять себѣ продолженною въ ту и другую сторону безъ конца, и такимъ образомъ можно такъ опредѣлить ее: *прямою линіей называется такая безконечная линія, какихъ можно провести только одну чрезъ двѣ данныя точки.*

Для проведенія прямой линіи на бумагѣ употребляется линейка.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что *двѣ прямыя линіи могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ* и двухъ общихъ точекъ имѣть не могутъ, потому что чрезъ двѣ точки можетъ проходить только одна прямая.

Прямую линію означаютъ двумя буквами, поставленными при какихъ нибудь двухъ точкахъ, на ней взятыхъ, такъ какъ двумя точками положеніе прямой совершенно опредѣляется; говорятъ: прямая АВ или ВА; причемъ не должно думать, что это есть только линія, соединяющая точки А и В, а должно представлять себѣ линію безконечной.

§ 13. Всякая опредѣленная часть безконечной прямой есть *конечная прямая*. Отъ одной точки до другой всегда можно провести конечную прямую; для этого должно чрезъ эти двѣ точки провести произвольной длины прямую, и та часть этой безконечной прямой, которая лежитъ между двумя точками, есть конечная прямая, соединяющая эти точки.

Теорема 1. *Отъ одной точки до другой можно провести только одну конечную прямую.*

Пусть будутъ А и В двѣ какія нибудь точки въ пространствѣ и отъ точки А до точки В проведена одна конечная прямая; требуется доказать, что другой конечной прямой отъ А до В провести невозможно.

Доказ. Конечная прямая, проведенная отъ А до В, есть часть безконечной прямой, проходящей чрезъ точки А и В. Если бы можно было провести отъ А до В еще одну конечную прямую, то и она была бы частью безконечной прямой, проходящей чрезъ точки А и В; но тогда проходили бы двѣ безконечныя прямыя чрезъ точки А и В, что невозможно, потому что прямая есть такая безконечная линія, какихъ можно провести только одну чрезъ двѣ данныя точки (§ 12). Слѣдовательно невозможно провести еще одну конечную прямую отъ точки А до точки В и значитъ отъ А до В можно провести только одну конечную прямую, что и требовалось доказать.

Теорема 2, *обратная. Если отъ одной точки до другой проведена линія, какихъ только одну и можно провести между этими двумя точками, то проведенная линія есть конечная прямая.*

Пусть отъ точки А до точки В проведена такая линія, что другой такой же отъ А до В провести невозможно; требуется доказать, что проведенная линія есть конечная прямая.

Доказ. Вообразимъ себѣ, что чрезъ точки А и В проведена вся безконечная прямая, кромѣ ея части между точками А и В, то она вмѣстѣ съ данной линіей составитъ цѣлую безконечную линію и притомъ такую, какихъ можно провести только одну чрезъ точки А и В, т. е. составитъ безконечную прямую линію, проходящую чрезъ точки А и В. Слѣдовательно данная линія есть часть безконечной прямой, т. е. она есть конечная прямая, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. *Кратчайшее разстояніе между двумя точками есть конечная прямая, которая эти точки соедина-*

етъ, потому что кратчайшее разстояніе между двумя точками можетъ быть только одно (аксіома 10), и оно должно итти по такой линіи, какихъ только одну и можно провести между двумя точками, а по теоремѣ 2-й такая линія есть конечная прямая, соединяющая эти точки.

На основаніи этого конечную прямую, соединяющую двѣ точки, называютъ разстояніемъ между этими точками, понимая подъ этимъ кратчайшее разстояніе. Для краткости, мы будемъ называть конечную прямую просто прямою, прибавляя слово *безконечная* въ случаѣ, если необходимо разумѣть прямую неопредѣленно продолженною.

§ 14. Двѣ прямыя называются *равными между собою*, если онѣ могутъ совмѣститься при наложеніи другъ на друга.

Представимъ себѣ, что прямая AB наложена на прямую A′B′ такъ, что конецъ ея A упалъ въ A′ и прямая AB пошла по A′B′, то прямая AB будетъ меньше A′B′, если другой конецъ ея B упадетъ на самой прямой A′B′ между точками A′ и B′, потому что часть меньше цѣлаго (аксіома 8). Если же конецъ B прямой AB упадетъ на продолженіи прямой A′B′ такъ, что точка B′ будетъ лежать между точками A′ и B, то прямая AB больше A′B′.

Прямыя откладываются на бумагѣ циркулемъ.

Задача 1. ***Начертить прямую равную двойной, тройной и т. д. данной прямой CD.***

Проведемъ безконечную прямую XY (чер. 3) и при какой нибудь точкѣ ея A отложимъ циркулемъ прямую AA_1 равную CD, потомъ отъ точки A_1 опять отложимъ въ ту же сторону A_1A_2 равную CD и т. д. Получимъ $AA_2 = 2CD$; $AA_3 = 3CD$ и т. д.

Чер. 3.

Задача 2. ***Начертить прямую, равную суммѣ или разности двухъ данныхъ прямыхъ AB и CD.*** (чер. 4).

Рѣш. Проведемъ безконечную прямую XY и отъ какой нибудь точки ея, напр. E, отложимъ $EE_1 = AB$ и потомъ отъ точки E_1 отложимъ въ ту же сторону линію $E_1E_2 = CD$, то получимъ прямую $EE_2 = AB + CD$, т. е. равную суммѣ двухъ данныхъ.

Чер. 4.

Если же отъ какой нибудь точки E безконечной прямой

(чер. 5) отложимъ $EE_1 = AB$ (большей изъ двухъ данныхъ линій) и потомъ отъ точки E, отложимъ въ другую сторону $E_1E_2 = CD$, то получимъ прямую $EE_2 = AB - CD$, т. е. равную разности двухъ данныхъ.

Чер. 5.

§ 15. Длину всякой прямой можно выразить цѣлымъ или дробнымъ числомъ точно, или насколько угодно близко къ точности. Для этого должно какую нибудь прямую, напр. CD (чер. 6), принять за единицу мѣры и потомъ найти сколько такихъ линій CD можетъ уложиться въ данной прямой AB; число, показывающее сколько разъ CD укладывается въ AB, и будетъ искомое число; т. е. должно сравнить данную линію AB съ линіей CD, принятой за единицу мѣры прямыхъ, или измѣрить прямую единицею мѣры.

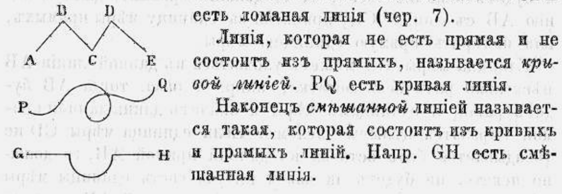
Единица мѣры CD можетъ уложиться въ данной линіи AB нѣсколько разъ безъ остатка, напр. 3 раза, тогда AB будетъ равно 3 единицамъ мѣры и значитъ длина данной прямой выразится цѣлымъ числомъ. Если единица мѣры CD не укладывается безъ остатка въ данной прямой AB, то должно искать, не будетъ ли какая нибудь часть единицы мѣры CD укладываться цѣлое число разъ въ прямой AB, и если найдемъ, что напр. 0,1 часть CD уложилась въ AB безъ остатка, напр. 37 разъ, то длина AB выразится точно и будетъ равна 3,7. Если же случится, что 0,1 часть CD уложится въ AB нѣсколько разъ, напр. 37 разъ, и получится остатокъ JB, который будетъ, очевидно, меньше 0,1 части единицы мѣры, то тогда AB будетъ равно приближенно 3,7; причемъ дѣлается ошибка, меньшая 0,1 единицы мѣры, потому что отбрасываемый остатокъ JB меньше 0,1 части CD. Если хотимъ измѣрить AB съ большей точностью, то должно раздѣлить единицу мѣры на болѣе мелкія части, напр. раздѣлить CD на 100 равныхъ частей и измѣрять AB сотой долей CD. Если при этомъ случится, что 0,01 часть CD уложилась въ AB безъ остатка, напр. 373 раза, то длина AB выразится точно и будетъ равна 3,73. Если же получится новый остатокъ, то AB будетъ равно приближенно— 3,73; причемъ ошибка будетъ менѣе 0,01 единицы мѣры. Продолжая дѣйствовать такимъ же образомъ далѣе, понятно,

Чер. 6.

что выразимъ длину AB или точно цѣлымъ числомъ съ дробью, или сдѣлаемъ ошибку, меньшую 0,001 или меньшую 0,0001 и т. д., т. е. сдѣлаемъ ошибку на сколько угодно малую и выразимъ AB на сколько угодно близко къ точности.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что, когда говорятъ: длина прямой равна *a*, то должно разумѣть подъ *a* цѣлое или дробное число, показывающее, точно или какъ угодно близко къ точности, сколько разъ заключается въ данной прямой или прямая, или часть прямой, принятой за единицу мѣры длины.

§ 16. Всякая линія, которая состоитъ изъ конечныхъ прямыхъ, не лежащихъ въ одной прямой, называется *ломаной линіей*. Такъ ABCDE есть ломаная линія (чер. 7).



Линія, которая не есть прямая и не состоитъ изъ прямыхъ, называется *кривой линіей*. PQ есть кривая линія.

Наконецъ *смѣшанной* линіей называется такая, которая состоитъ изъ кривыхъ и прямыхъ линій. Напр. GH есть смѣшанная линія.

Плоскость.

§ 17. Существуетъ безчисленное множество разныхъ поверхностей, но мы теперь будемъ говорить только о такихъ, которыя можно продолжать сколько угодно по направленію всѣхъ ихъ протяженій, и будемъ всегда представлять себѣ эти поверхности безконечными. Такихъ безконечныхъ поверхностей тоже можно представить себѣ безчисленное множество. Если смотрѣть на такую поверхность съ одной стороны, то на ней могутъ быть самые разнообразные выступы въ извѣстныхъ мѣстахъ и углубленія въ другихъ, или она вся можетъ представляться вдавленной, или выпуклой, или можетъ этого не быть.

Вообразимъ себѣ три точки въ пространствѣ A,B и C, которыя не лежатъ на одной прямой линіи, то понятно, что чрезъ такія три точки можно провести множество разныхъ безконечныхъ поверхностей. Представимъ себѣ, что чрезъ эти три точки проведена какая нибудь одна безконечная поверхность съ извѣстными выступами и углубленіями, то легко видѣть, что этой поверхности можно дать много разныхъ положеній, при которыхъ она будетъ проходить чрезъ тѣ же три точки. Въ самомъ дѣлѣ: мы можемъ какую угодно точку поверхности привести въ совпаденіе съ точкою A; потомъ, вращая поверхность около точки A, можно привести въ совпаденіе съ точкою B всякую точку поверхности, находящуюся на разстояніи AB отъ точки A; наконецъ, вращая поверхность около прямой линіи, проведенной чрезъ точки A и B, можно продолжать такое вращеніе до тѣхъ поръ, пока и третья точка C не будетъ на поверхности. При этомъ мы можемъ привести въ совпаденіе съ точкою A ту точку поверхности, которая напр. наиболѣе выступаетъ, и это даетъ одно положеніе поверхности. Потомъ можно привести въ совпаденіе съ точкою A другую точку поверхности, и это даетъ другое положеніе поверхности. Значитъ вообще, если только на поверхности есть точки, отличающіяся отъ другихъ точекъ поверхности по своему положенію, напр. такія, которыя болѣе или менѣе выступаютъ, то поверхности можно дать болѣе одного положенія. Изъ этого слѣдуетъ, что всякая поверхность, на которой есть выступы или углубленія, есть такая поверхность, какихъ можно провести болѣе одной чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой, потому что чрезъ каждое изъ разныхъ положеній данной поверхности можно представить себѣ новую поверхность, одинакую съ данной.

Но если безконечная поверхность не имѣетъ ни выступовъ, ни углубленій, нѣтъ на ней выпуклостей и вогнутостей и вообще нѣтъ точекъ, чѣмъ нибудь другъ отъ друга отличающихся, то чрезъ три точки не на одной прямой нельзя будетъ провести болѣе одной такой поверхности, и такую-то безконечную поверхность называютъ плоскостью, или прямой поверхностью.

§ 18. Вообразимъ себѣ, что чрезъ три данныя точки въ пространствѣ, не лежащія на одной прямой, проведена какая нибудь безконечная поверхность, то можетъ быть два случая:

1) или поверхность, которую мы провели, можетъ быть такая, какихъ еще сколько угодно можно провести чрезъ тѣ-же три точки;

2) или такая, какихъ болѣе одной чрезъ тѣ-же три точки провести невозможно—это та, которую называютъ прямою поверхностью или плоскостью.

Такимъ образомъ можно сказать, что *прямою поверхностью или плоскостью называется такая безконечная поверхность, какихъ можно провести только одну чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой линіи.*

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что *двѣ плоскости могутъ пересѣкаться только въ прямой линіи*, потому что, еслибы пересѣченіемъ двухъ плоскостей была не прямая, а какая нибудь другая линія, то на этой линіи можно было бы взять три точки, не лежащія на одной прямой, и такъ какъ эти три точки лежали бы на обоихъ плоскостяхъ, то плоскости сливались бы въ одну, потому что плоскость есть такая безконечная поверхность, какихъ можно провести только одну чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой линіи.

§ 19. **Теорема.** *Если чрезъ двѣ какія нибудь точки плоскости проведемъ прямую линію, то и всѣ точки прямой линіи будутъ лежать на плоскости.*

Пусть дана плоскость. Возьмемъ на этой плоскости двѣ какія нибудь точки A и B и проведемъ чрезъ эти двѣ точки прямую линію. Требуется доказать, что всѣ точки этой прямой лежатъ на плоскости.

Доказ. Проведемъ чрезъ точки A и B еще одну плоскость. Эта плоскость пересѣчетъ данную плоскость въ прямой линіи, проходящей чрезъ точки A и B, потому что двѣ плоскости могутъ пересѣкаться только въ прямой линіи (§ 18). Линія пересѣченія обоихъ плоскостей есть именно та прямая, которая проведена чрезъ точки A и B, потому что чрезъ двѣ точки можно провести только одну прямую. Но какъ всѣ точки линіи пересѣченія этихъ двухъ плоскостей лежатъ на данной плоскости, то слѣдовательно и всѣ точки прямой, которую мы провели чрезъ точки A и B, лежатъ на данной плоскости, что и требовалось доказать.

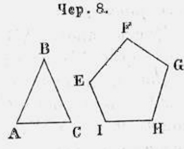
Всякая линія, которую можно помѣстить на плоскости, называется *плоской линіей*. Изъ доказанной теоремы слѣдуетъ, что прямая линія есть плоская линія.

Такъ какъ плоскость и прямая линія безконечны, то прямая линія, помѣщенная на плоскости, раздѣляетъ плоскость на двѣ безконечно большія части.

§ 20. Всякая опредѣленная часть плоскости, ограниченная какой-нибудь ломаной или кривой линіей, называется *геометрической фигурой*. Геометрическая фигура, ограниченная ломаной линіей, называется вообще *многоугольникомъ*;

притомъ — треугольникомъ, если ограничена тремя пересѣкающимися прямыми, четыреугольникомъ—четырьмя и т. д.

Чер. 8.



Многоугольники обозначаютъ буквами, поставленными въ точкахъ пересѣчеія прямыхъ. Такъ (чер. 8) говорятъ: треугольникъ ABC; пятиугольникъ EFGHI.

Окружность круга.

§ 21. *Окружностью* называется такая плоская кривая линія, у которой всѣ точки находятся въ равномъ разстояніи отъ одной точки, лежащей на плоскости и называемой *центромъ* (κέντρον, centrum) окружности.

Для описыванія окружности употребляютъ циркуль.

Окружность раздѣляетъ безконечную плоскость, на которой помѣщается, на двѣ части: одну, опредѣленную, внутреннюю, и другую, неопредѣленную,—внѣшнюю. Опредѣленная часть плоскости, заключающаяся внутри окружности, есть геометрическая фигура, которую называютъ *кругомъ*.

Разстояніе центра отъ какой нибудь точки окружности называется *радіусомъ* (radius—лучъ). По опредѣленію окружности всѣ радіусы той же окружности равны между собою.

Разстояніе между двумя точками окружности называется *хордою* (χορδή —тетива), т. е. хорда есть прямая, проведенная отъ одной точки окружности до другой (§ 13). Такъ прямая AB есть хорда (чер 9).

Чер. 9.

Хорда, проходящая черезъ центръ, называется *діаметромъ* (διά, — поперегъ и μετρέω—мѣряю). Напр. CD есть діаметръ. Понятно, что діаметръ равняется двумъ радіусамъ.

Всякая часть окружности называется *дугою*. Напр. AEB есть дуга. Дугу обозначаютъ знакомъ ◡; такъ: дуга AEB или ◡ AB.

§ 22. Двѣ окружности называются *равными* между собою, если при совпаденіи центровъ они совмѣщаются. Понятно, что окружности равны, если ихъ радіусы равны.

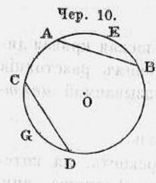
Двѣ дуги той же или двухъ равныхъ окружностей называются *равными между собою*, если онѣ могутъ совмѣститься при наложеніи другъ на друга.

Теорема 1. *Если двѣ дуги той же или двухъ равныхъ окружностей равны между собою, то и хорды, ихъ стягивающія равны.*

Пусть дано: ◡ AB = ◡ CD (чер. 10). Требуется доказать, что хорда AB равна хордѣ CD.

Доказ. Наложимъ отрѣзокъ круга CGD на отрѣзокъ AEB такъ, чтобы точка C упала въ точку A и чтобы ◡ CGD пошла по ◡ AEB, тогда по равенству этихъ дугъ точка D упадетъ въ точку B, т. е. дуги совмѣстятся. Значитъ концы хорды CD совмѣстятся съ концами хорды AB, а слѣдовательно и хорда CD совмѣстится съ хордою AB, потому что хорда есть прямая, а отъ одной точки A до другой B можно провести только одну прямую (§ 13, теор. I). Если же эти прямыя совмѣстились, то онѣ равны между собою (§ 14, опред.), что и требовалось доказать.

Чер. 10.



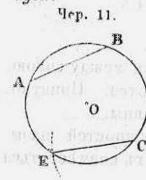
Теорема 2, *обр. Если хорды той же или двухъ равныхъ окружностей равны, то и стягиваемыя ими дуги равны.*

Пусть дано: хорда CD равна хордѣ AB, и требуется доказать, что ◡ CD = ◡ AB.

Доказ. Наложимъ отрѣзокъ CGD на отрѣзокъ AEB такъ, чтобы точка C упала въ точку A и чтобы хорда CD пошла по хордѣ AB, тогда, по равенству этихъ хордъ, точка D упадетъ въ точку B, т. е. хорды совмѣстятся (§ 14). Значитъ концы ◡ CD совмѣстятся съ концами ◡ AB, а слѣдовательно и всѣ точки ◡ CD совмѣстятся съ точками ◡ AB, потому что по опредѣленію окружности всѣ точки этихъ дугъ находятся въ равномъ разстояніи отъ центра. Если же дуги CD и AB совмѣстились, то онѣ равны между собою, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. *Діаметръ дѣлитъ окружность на двѣ равныя дуги.*

Чер. 11.



Задача. *Отъ данной точки C окружности отложить дугу равную* ◡ *AB* (чер. 11). Соединимъ концы ◡ AB хордою и потомъ изъ точки C какъ изъ центра радіусомъ, равнымъ AB, опишемъ дугу, которая пересѣчетъ данную окружность въ точкѣ E. Тогда ◡ CE = ◡ AB, потому что хорда CE = AB (теор. 2).

§ 23. Если отложимъ отъ точки A окружности (чер. 12) дугу CD въ сторону дуги AB и случится, что другой конецъ дуги CD упадетъ между точками A и B, напр. въ точку E, то ◡ CD будетъ меньше дуги AB (аксіома 8). Если же конецъ откладываемой дуги не упадетъ между точками A и B а упадетъ, напр. въ точку E_1, то ◡ CD будетъ больше дуги AB (аксіома 8).

Чер. 12.

Задача 1. *Найти дугу равную двойной, тройной и т. д. данной дугѣ.* Отъ какой нибудь точки A окружности (чер. 13) отложимъ дугу AA_1, равную ◡ CD и потомъ опять (въ ту же сторону) отъ точки A_1 отложимъ ◡ A_1A_2 = ◡ CD и т. д., то получимъ дугу AA_2 равную двойной ◡ CD; дугу AA_3 равную тройной ◡ CD и т. д.

Чер. 13.

Задача 2. *Найти дугу равную суммѣ и равную разности двухъ данныхъ дугъ AB и CD.*

Рѣшеніе подобно тому, какъ и въ случаѣ прямыхъ (§ 14).

§ 24. Разсуждая надъ дугами той же окружности совершенно такъ, какъ надъ прямыми въ § 15, найдемъ, что, если примемъ какую нибудь дугу, напр. ◡ CD за единицу мѣры дугъ и узнаемъ, сколько такихъ дугъ или частей ея укладывается въ данной дугѣ AB, точно или на сколько угодно близко къ точности, то ◡ AB выразится цѣлымъ или дробнымъ числомъ, точно или на сколько угодно близко къ точности. Это цѣлое или дробное число будетъ показывать сколько разъ въ данной дугѣ заключается или дуга принятая за единицу мѣры, или какая нибудь часть этой дуги. Такъ, если говорятъ длина ◡ AB равна a, то должно подъ a разумѣть цѣлое, или дробное число, показывающее сколько разъ въ ◡ AB укладывается или ◡ CD, или извѣстная часть ◡ CD, принятой за единицу мѣры дугъ.

Обыкновенно за единицу мѣры дугъ принимаютъ 360-ю часть длины всей окружности. Такую единицу называютъ градусомъ и обозначаютъ знакомъ ^{0}, поставленнымъ надъ числомъ. Такъ если ◡ AB заключаетъ въ себѣ 3 дуги въ одинъ градусъ, то пишутъ: ◡ AB = 3^0, и говорятъ: тремъ градусамъ. Градусъ раздѣляютъ на 60 частей, которыя называютъ минутами и означаютъ знакомъ $'$. Минуту раздѣляютъ

на 60 частей называютъ секундами и означаютъ знакомъ ″. Такъ напр., если дуга AB=37° 13′ 15″, то это значитъ, что въ дугѣ AB заключается дуга, принятая за единицу мѣры (т. е. $\frac{1}{360}$ часть всей окружности), 37 разъ и еще $\frac{1}{60}$ часть единицы дугъ—13 разъ и еще $\frac{1}{60}$ часть первой части, т. е. $\frac{1}{3600}$ часть единицы дугъ—15 разъ. Вообще, если говорятъ длина дуги равна *a*, то подъ *a* должно разумѣть нѣкоторое цѣлое или дробное число градусовъ.

Раздѣленіе геометріи.

§ 25. Геометрія (γῆ — земля и μετρέω—мѣряю) раздѣляется на *плоскую геометрію* (планиметрія — planus, плоскость и μετρέω, мѣряю) и на *геометрію въ пространствѣ* (стереометрія—στερεός, твердый и μετρέω, мѣряю).

Плоская геометрія есть ученіе о плоскихъ линіяхъ, ихъ взаимномъ положеніи на плоскости, и частяхъ плоскости, ограниченныхъ этими линіями, т. е. ученіе о всемъ томъ, что можетъ быть совмѣщено съ плоскостью.

Геометрія въ пространствѣ есть ученіе о томъ изъ пространства, что съ плоскостью не совмѣщается, т. е. въ составъ ея входятъ: геометрическія тѣла, всякія поверхности, всякія линіи и ихъ взаимное положеніе въ пространствѣ.

Вслѣдствіе обширности предмета, какъ плоскую геометрію, такъ и геометрію въ пространствѣ раздѣляютъ на *начальную* и *высшую*. При этомъ въ начальной плоской геометріи изучаются только двѣ плоскія линіи: прямая линія и одна изъ кривыхъ—окружность. Такія линіи помѣщаютъ на безконечной плоскости и изучаютъ какъ взаимныя пересѣченія линій, такъ и опредѣленныя и неопредѣленныя части плоскости, на которыя она дѣлится этими линіями.

Въ начальной же геометріи въ пространствѣ изучается взаимное положеніе прямыхъ линій и плоскостей въ пространствѣ, тѣла, ограниченныя пересѣкающимися плоскостями, и только три тѣла съ ограничивающими ихъ кривыми поверхностями, а именно: цилиндръ, конусъ и шаръ.

Плоская Геометрія.

СПОСОБЪ НАЛОЖЕНІЯ.

ОТДѢЛЪ I.

Взаимное положеніе прямыхъ линій.

Углы.

§ 26. Вообразимъ себѣ двѣ прямыя линіи на плоскости; такія двѣ линіи не могутъ имѣть болѣе одной общей точки (§ 12), а имѣютъ или одну общую точку, какъ напр. AB и CD (чер. 14), у которыхъ точка O общая; или могутъ не имѣть общей точки, т. е. не встрѣчаться, сколько бы мы ихъ ни продолжали въ ту и другую сторону, какъ напр. линіи KL и MN (чер. 15). Въ первомъ случаѣ линіи называются *пересѣкающимися*, во второмъ *параллельными*. Разсмотримъ предварительно двѣ пересѣкающіяся прямыя.

Чер. 14.

Чер. 15.

§ 27. Двѣ пересѣкающіяся прямыя раздѣляютъ всю безконечную плоскость, на которой онѣ лежатъ, на четыре части; части эти неопредѣленно большія, потому что плоскость и прямыя линіи должно представлять себѣ продолженными безъ конца (§§ 12, 17). Каждая изъ такихъ частей плоскости называется угломъ, такъ что *угломъ называется неопредѣленная часть плоскости, заключенная между двумя пересѣкающимися прямыми линіями*. Точка пересѣченія прямыхъ называется *вершиною угла*; пересѣкающіяся прямыя—*сторонами угла*. Уголъ обозначается тремя буквами: одна

буква ставится при вершинѣ угла, двѣ остальныя на сторонахъ. Буква, стоящая при вершинѣ, произносится между двумя другими. Такъ напр. (чер. 14) говорятъ: уголъ AOC, уголъ AOD, уголъ DOB, уголъ BOC. Если уголъ начерченъ отдѣльно, то его можно обозначать одною буквою, поставленной при вершинѣ, напр. уголъ A (чер. 16). Уголъ обозначаютъ знакомъ $\angle$. Такъ пишутъ: $\angle A$, или $\angle BAC$, и говорятъ: уголъ A, или уголъ BAC.

Чер. 16.

§ 28. Два угла называются *равными между собою*, если можно наложить одинъ изъ нихъ на другой такъ, чтобы они совпали. Напр. вообразимъ себѣ, что $\angle A_1B_1C_1$ (чер. 17) наложенъ на $\angle ABC$ такъ, что вершина B_1 совпала съ вершиною B и что прямая B_1C_1 пошла по направленію прямой BC, то углы будутъ равны между собою, если и другая сторона перваго угла, т. е. прямая B_1A_1 можетъ пойти по другой сторонѣ втораго угла, т. е. по прямой BA.

Чер. 17.

Теорема 1. *Если изъ вершинъ двухъ угловъ опишемъ равными радіусами дуги и если эти углы равны, то и дуги равны.*

Опишемъ изъ вершинъ двухъ угловъ ABC и $A_1B_1C_1$ (чер. 18) т. е. изъ точекъ B и B_1, какъ изъ центровъ, произвольнымъ, но только равнымъ для обоихъ угловъ, радіусомъ дуги KL и MN, и положимъ, что дано: $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$; требуется доказать, что $\cup KL = \cup MN$.

Чер. 18.

Доказ. Наложимъ $\angle A_1B_1C_1$ на $\angle ABC$ такъ, чтобы вершина B_1 упала въ вершину B и чтобы сторона B_1C_1 пошла по сторонѣ BC, тогда сторона B_1A_1 пойдетъ по сторонѣ BA, потому что углы по условію равны между собою и значитъ совпадутъ при наложеніи. При этомъ, по равенству радіусовъ, точка N упадетъ въ точку L и точка M въ точку K; слѣдовательно концы дуги MN совпадутъ съ концами дуги KL. Но такъ какъ всѣ точки обѣихъ дугъ находятся въ равномъ разстояніи отъ центра, потому что это дуги двухъ равныхъ окружностей (§ 21), то и промежуточныя точки дуги MN со-

вмѣстятся съ промежуточными точками дуги KL. Если же дуги совмѣстились при наложеніи, то онѣ равны (§ 22), что и требовалось доказать.

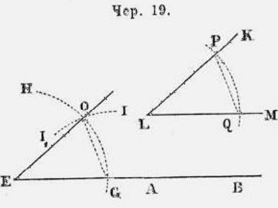
Теорема 2, *обр. Если изъ вершинъ двухъ угловъ опишемъ равными радіусами дуги и если дуги равны, то и углы равны.*

Опишемъ изъ вершинъ B и B_1 двухъ угловъ ABC и $A_1B_1C_1$ произвольными, но равными радіусами дуги KL и MN, и положимъ, что дано: $\cup KL = \cup MN$; требуется доказать, что $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Доказ. Наложимъ $\angle A_1B_1C_1$ на $\angle ABC$ такъ, чтобы точка B_1 упала въ точку B и чтобы сторона B_1C_1 пошла по сторонѣ BC, тогда $\cup MN$ пойдемъ по $\cup KL$, потому что точки этихъ дугъ находятся въ равномъ разстояніи отъ центра; притомъ точка M упадетъ въ точку K, потому что по условію $\cup MN = \cup KL$ (§ 22). Если же двѣ точки B_1 и M прямой B_1M совпали съ двумя точками B и K прямой BK, то и прямыя совпадутъ (§ 13, теор. I). Значитъ $\angle A_1B_1C_1$ совмѣстится съ $\angle ABC$ и слѣдовательно эти углы равны между собою.

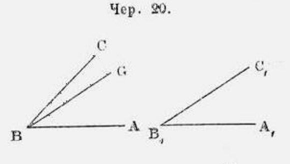
Задача. *При какой нибудь точкѣ E данной прямой AB* (чер. 19) *построить уголъ, равный данному углу* KLM.

Чер. 19.



Рѣш. Опишемъ произвольнымъ радіусомъ изъ вершины $\angle KLM$ дугу PQ и тѣмъ же радіусомъ изъ точки E (какъ центра) дугу GH; соединимъ точки P и Q прямою PQ, и радіусомъ равнымъ PQ изъ точки G (какъ центра) опишемъ $\cup II_1$. Точку пересѣченія O послѣдней съ $\cup GH$ соединимъ съ точкою E, тогда $\angle OEG$ будетъ равенъ $\angle KLM$, потому что хорда PQ = хордѣ OG, по построенію; слѣдовательно и $\cup PQ = \cup OG$ (§ 22, теор. 2). Если же дуги равны, то и углы равны (теор. 2).

Чер. 20.



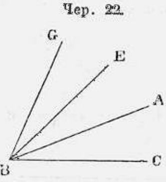
§ 29. Если можно наложить $\angle A_1B_1C_1$ (чер. 20) на $\angle ABC$ такъ, чтобы вер-

шина B_1 упала въ B, сторона B_1A_1 пошла бы по BA и линія B_1C_1 приняла бы направленіе BG между сторонами угла ABC, такъ что $\angle A_1B_1C_1$ помѣстится внутри угла ABC, то $\angle A_1B_1C_1$ будетъ *меньше* $\angle ABC$, потому что часть меньше цѣлаго (акс. 8). Если же $\angle A_1B_1C_1$ (чер. 21) можно наложить на $\angle ABC$ такъ, чтобы вершина B_1 упала въ B, сторона B_1C_1 слилась бы со стороною BC и чтобы линія B_1A_1 приняла направленіе BG, при которомъ BA будетъ между BC и BG, такъ что $\angle A_1B_1C_1$ будетъ вмѣщать въ себѣ $\angle ABC$, то $\angle A_1B_1C_1$ *больше* $\angle ABC$ (акс. 8).

Чер. 21.

Изъ сказаннаго ясно, что величина угла не зависитъ отъ длины его сторонъ, которыя должно представлять себѣ всегда безъ конца, а зависитъ отъ взаимнаго наклоненія сторонъ другъ къ другу.

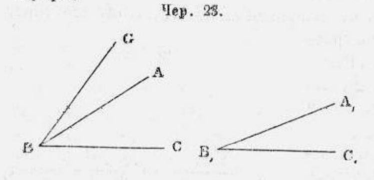
Задача 1. *Построить уголъ, равный двойному, тройному, и т. д. данному углу* ABC (чер 22).



Чер. 22.

Рѣш. На сторонѣ BA угла ABC, при точкѣ B построимъ $\angle ABE$, равный $\angle ABC$ (§ 28) и получимъ уголъ CBE, равный двойному $\angle ABC$. Откладывая опять при точкѣ B прямой BE уголъ EBG, равный $\angle ABC$, получимъ $\angle CBG$, равный тройному данному, и т. д.

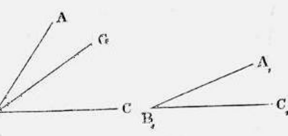
Задача 2. *Построить уголъ, равный суммѣ или равный разности двухъ данныхъ угловъ* ABC *и* $A_1B_1C_1$.



Чер. 23.

Рѣш. На сторонѣ BA угла ABC (чер. 23) при точкѣ B построимъ $\angle ABG$, равный $\angle A_1B_1C_1$, то получимъ $\angle GBC$, равный суммѣ двухъ данныхъ. Если же

на сторонѣ BA (чер. 24) большаго $\angle ABC$ и при точкѣ B построимъ $\angle ABG$, равный $\angle A_1B_1C_1$, то получимъ $\angle GBC$, равный разности угловъ ABC и $A_1B_1C_1$.

Чер. 24.


§ 30. Разсуждая надъ углами точно такъ, какъ надъ конечными прямыми въ § 15, найдемъ, что если примемъ какой нибудь уголъ, напр. $\angle ABC$, за единицу мѣры угловъ и узнаемъ сколько разъ такой уголъ или часть его укладывается въ данномъ углѣ CDE точно или на сколько угодно близко къ точности, то $\angle CDE$ выразится цѣлымъ или дробнымъ числомъ, точно или на сколько угодно близко къ точности. Это цѣлое или дробное число будетъ показывать сколько разъ заключается въ данномъ углѣ уголъ, принятый за единицу мѣры, или какая нибудь часть этого угла. Поэтому, если говорятъ: уголъ CDE равенъ a, то должно подъ a разумѣть цѣлое или дробное число, показывающее сколько разъ $\angle ABC$ или извѣстная часть его укладывается въ данномъ углѣ.

§ 31. Если окружность раздѣлимъ на 360 равныхъ частей, т. е. на градусы, и всѣ точки дѣленія соединимъ съ центромъ, то получимъ при центрѣ окружности 360 угловъ, которые всѣ будутъ равны между собою, потому что дуги, имъ соотвѣтствующія, равны (§ 28, теор. 2). Если изъ центра окружности опишемъ разными радіусами еще нѣсколько окружностей, то каждая изъ нихъ раздѣлится сторонами угловъ на 360 равныхъ между собою частей, т. е. на градусы, потому что всѣ углы равны между собою, слѣдовательно описанныя изъ ихъ вершинъ тѣмъ же радіусомъ дуги, какъ напр. ◡ KL и ◡ LM (чер. 25), равны между собою (§ 28, теор. 1). Изъ этого видно, что если раздѣлимъ окружность на 360 равныхъ частей и соединимъ двѣ рядомъ лежащія точки A и B съ центромъ, то получимъ $\angle AOB$, дуга котораго AB есть дуга въ одинъ градусъ, и какимъ бы радіусомъ изъ вершины этого угла мы ни описали дугу,

Чер. 25.

каждая изъ этихъ дугъ будетъ $\frac{1}{360}$ часть окружности, которой она принадлежитъ, т. е. будетъ дуга въ 1°. Такой уголъ принимаютъ за единицу мѣры угловъ и называютъ угломъ въ одинъ градусъ, означая его такъ: $\angle AOB = 1^{\circ}$. Уголъ въ 1° раздѣляютъ на 60 равныхъ частей и называютъ каждую изъ такихъ частей угломъ въ одну минуту, означая его такъ: $\angle 1'$. Наконецъ, уголъ въ $1'$ раздѣляютъ тоже на 60 равныхъ частей и называютъ угломъ въ одну секунду, означая его такъ: $\angle 1''$. Слѣдовательно уголъ въ $1'$ есть $\frac{1}{60}$, а уголъ въ $1''$ есть $\frac{1}{3600}$ часть угла, принятаго за единицу мѣры угловъ, т. е. угла въ 1°. Если говорятъ: уголъ въ a градусовъ, то подъ a должно разумѣть цѣлое или дробное число градусовъ, причемъ дробь можно выразить въ минутахъ, секундахъ и частяхъ секунды. Изъ вышесказаннаго понятно, что углу въ $1'$ соотвѣтствуетъ и дуга въ $1'$, углу въ $1''$—дуга въ $1''$ и вообще углу въ нѣсколько градусовъ, минутъ и секундъ соотвѣтствуетъ и дуга во столько же градусовъ, минутъ и секундъ.

§ 32. Изъ четырехъ угловъ, образуемыхъ двумя пересѣкающимися прямыми, каждые два угла съ общей стороной называются *смежными*; такъ (чер. 26) $\angle COA$ и $\angle AOD$ имѣютъ общую сторону OA и суть смежные углы; $\angle AOD$ есть смежный $\angle DOB$; $\angle DOB$ смежный $\angle BOC$ наконецъ $\angle BOC$ смежный $\angle COA$. Значитъ: *смежными углами называются два угла, у которыхъ общая вершина, общая сторона и двѣ другія стороны лежатъ въ одной прямой.*

Чер. 26.

Если два смежные угла равны между собою, какъ напримѣръ углы AOB и BOC, (чер. 27), то каждый изъ нихъ называется *прямымъ угломъ*; такимъ образомъ: *прямой уголъ есть одинъ изъ двухъ равныхъ смежныхъ угловъ.*

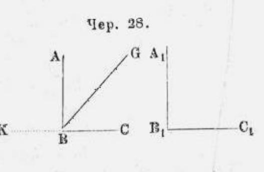
Чер. 27.

Теорема 1. *Всѣ прямые углы равны между собою.*

Возьмемъ два произвольные прямые угла $\angle ABC$ и $\angle A_1B_1C_1$ (чер. 28) и докажемъ, что они равны.

Доказ. Наложимъ прямой уголъ $A_1B_1C_1$ на прямой уголъ ABC такъ, чтобы точка B_1 упала въ B и сторона B_1C_1 пошла бы по сторонѣ BC, то легко доказать, что прямая B_1A_1 необходимо пойдетъ по прямой BA. Въ самомъ дѣлѣ, если предположимъ, что B_1A_1 не пойдетъ по BA, а приметъ нѣкоторое другое направленіе, напр. BG, то $\angle A_1B_1C_1$ приметъ положеніе GBC. Такъ какъ уголъ GBC прямой, то онъ равенъ своему смежному $\angle KBG$, а потому

Чер. 28.



$$\angle GBC = \angle KBA + \angle ABG;$$

Слѣдов. (акс. 8) $\qquad \angle GBC > \angle KBA.$

Съ другой стороны $\angle KBA$, какъ смежный данному прямому углу ABC, тоже прямой и равенъ углу ABC; если мы замѣнимъ въ послѣднемъ неравенствѣ $\angle KBA$ равнымъ ему угломъ ABC (акс. 7), то будемъ имѣть $\angle GBC > \angle ABC$, что невозможно, потому что $\angle GBC$, какъ часть $\angle ABC$, меньше, а не больше $\angle ABC$. Слѣдов. невозможно допустить, чтобы прямая B_1A_1 пошла внутри $\angle ABC$. Подобнымъ же образомъ докажемъ, что прямая B_1A_1 не можетъ пойти и внѣ угла ABC, а потому B_1A_1 необходимо пойдетъ по BA, тогда уголъ $A_1B_1C_1$ совмѣстится съ угломъ ABC, и слѣдов. эти углы равны между собою (§ 28).

То, что сказано, относится ко всякимъ двумъ прямымъ угламъ и показываетъ, что всѣ прямые углы совпадаютъ при наложеніи, а потому они равны между собою.

Постоянную величину прямаго угла означаютъ буквою d (droit), подъ которою должно разумѣть число, показывающее сколько заключается въ прямомъ углѣ угловъ, принятыхъ за единицу мѣры. Если за единицу мѣры угловъ принятъ уголъ въ 1°, то $d = 90^{\circ}$.

Всякій уголъ, меньшій прямаго угла, называется *острымъ* угломъ, а большій прямаго—*тупымъ* угломъ.

Теорема 2. *Сумма всякихъ двухъ смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ.*

Пусть будутъ $\angle AOD$ и $\angle BOD$ (чер. 29) неравные смежные углы и напр. $\angle AOD > \angle BOD$; требуется доказать, что $\angle AOD + \angle BOD = 2d$.

Доказ. Проведемъ чрезъ точку O прямую OC, образую-

щую съ прямой AB равные смежные углы (т. е. прямые); эта линія раздѣлитъ бо́льшій уголъ на два угла $\angle AOC$ и $\angle COD$, такъ что:

$$\angle AOD+\angle BOD=\angle AOC+\angle COD+\angle BOD.$$

Чер. 29.

Но $\angle AOC$ прямой и сумма $\angle COD+\angle BOD$ составляетъ тоже прямой. Слѣдовательно (акс. 7) $\angle AOD+\angle BOD=2d$, что и требовалось доказать.

Теорема 3, *обр. Если сумма двухъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ, то изъ такихъ угловъ можно составить смежные.*

Пусть дано, что сумма $\angle ABC+\angle KLM=2d$ (чер. 30), и требуется доказать, что изъ этихъ угловъ можно составить смежные.

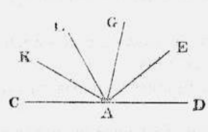
Чер. 30.

Доказ. Продолжимъ прямую AB по направленію BN и составимъ $\angle CBN$ смежный $\angle ABC$, тогда по теоремѣ 2-й: $\angle ABC+\angle CBN=2d$, а по условію заданія: $\angle ABC+\angle KLM=2d$; слѣдов. (акс. 1) $\angle ABC+\angle CBN=\angle ABC+\angle KLM$, или (акс. 2) $\angle CBN=\angle KLM$. Если же $\angle CBN=\angle KLM$, то эти углы совмѣстятся при наложеніи другъ на друга (§ 28), а потому $\angle KLM$, принявъ положеніе $\angle CBN$, составитъ съ угломъ ABC смежный уголъ, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1. *Если два угла, которыхъ сумма равна 2d, имѣютъ общую сторону, общую вершину и притомъ одинъ уголъ не лежитъ внутри другаго, то двѣ другія стороны этихъ угловъ составляютъ одну прямую.*

Слѣдствіе 2. *Если изъ точки A, взятой на прямой CD* (чер. 31), *проведемъ по одну сторону CD нѣсколько прямыхъ* AE, AG, AL, AK, *то составятся углы* $\angle DAE$, $\angle EAG$, $\angle GAL$, $\angle LAK$ и $\angle KAC$, *сумма которыхъ равна двумъ прямымъ угламъ*, потому что эту сумму можно замѣнить суммой двухъ смежныхъ угловъ.

Чер. 31.

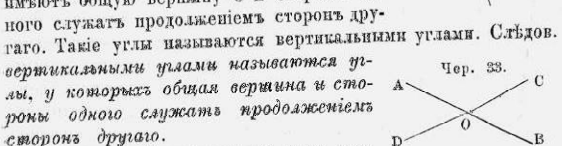


Слѣдствіе 3. *Если изъ точки* A (чер. 32) *плоскости проведемъ нѣсколько прямыхъ, то составятся при точкѣ* A

углы, сумма которыхъ равна 4d. Это сдѣлается очевиднымъ, если чрезъ точку A проведемъ какую нибудь прямую PQ.

Чер. 32.

§ 33. Изъ четырехъ угловъ, образуемыхъ двумя пересѣкающимися прямыми AB и CD (чер. 33) каждые два угла $\angle COB$ и $\angle AOD$ или два угла $\angle AOC$ и $\angle DOB$ имѣютъ общую вершину O и стороны одного служатъ продолженіемъ сторонъ другаго. Такіе углы называются вертикальными углами. Слѣдов. *вертикальными углами называются углы, у которыхъ общая вершина и стороны одного служатъ продолженіемъ сторонъ другаго.*



Чер. 33.

Теорема 1. *Вертикальные углы равны между собою.* Докажемъ, что $\angle COB=\angle AOD$.

Доказ. Углы COB и COA суть смежные, слѣдов. (§ 32, теор. 2) $\angle COB+\angle COA=2d$; такимъ же образомъ: $\angle AOD+\angle COA=2d$; откуда (акс. 1)

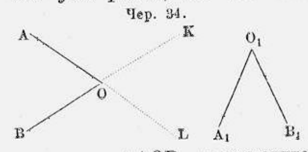
$\angle COB+\angle COA=\angle AOD+\angle COA$, или (акс. 2)

$\angle COB=\angle AOD$, что и требовалось доказать.

Подобнымъ же образомъ докажется, что и $\angle AOC=\angle BOD$.

Теорема 2, *обр. Если два угла равны, то изъ нихъ можно составить вертикальные углы.* Пусть (чер. 34) $\angle AOB=\angle A_1O_1B_1$, и требуется доказать, что изъ этихъ угловъ можно составить вертикальные.

Чер. 34.



Доказ. Если продолжимъ стороны $\angle AOB$, то составится $\angle KOL$ вертикальный $\angle AOB$ и, значитъ, равный ему (теор. 1), т. е. $\angle KOL=\angle AOB$; но, по условію, $\angle A_1O_1B_1=\angle AOB$; слѣдоват. (акс. 1) $\angle KOL=\angle A_1O_1B_1$; а потому, если наложимъ $\angle A_1O_1B_1$ на $\angle KOL$, то эти углы совмѣстятся (§ 28), причемъ $\angle A_1O_1B_1$ составитъ вертикальный уголъ съ $\angle AOB$, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. *Если два равныхъ угла имѣютъ общую вершину, двѣ стороны ихъ лежатъ въ одной прямой и притомъ двѣ другія стороны лежатъ по разнымъ сторонамъ этой прямой, то и эти послѣднія двѣ стороны составляютъ также одну прямую.*

Прямыя перпендикулярныя и наклонныя.

§ 34. Когда двѣ прямыя пересѣкаются и одинъ изъ 4-хъ угловъ, образуемыхъ ими, прямой, то каждый изъ остальныхъ 3-хъ угловъ тоже прямой, такъ какъ прямымъ угломъ называется одинъ изъ двухъ равныхъ смежныхъ (§ 32). Прямыя, пересѣкающіяся подъ прямыми углами, называются перпендикулярными другъ къ другу. Такимъ образомъ, *двѣ пересѣкающіяся прямыя называются перпендикулярными* (pendere—висѣть) *другъ къ другу, если образуютъ своимъ пересѣченіемъ четыре прямыхъ угла.* Напр. если углы (чер. 35) AOC, COB, BOD и AOD прямые, то AB перпендикулярна къ CD и, обратно, CD перпендикулярна AB; это означаютъ такъ: AB⊥CD или CD⊥AB.

Чер. 35.

Перпендикулярная прямая линія часто называется просто *перпендикуляромъ*, особенно когда говорится не о всей перпендикулярной прямой, а только о части ея AO, лежащей по одну сторону прямой CD. Въ этомъ случаѣ точка встрѣчи O прямыхъ называется *основаніемъ* перпендикуляра AO.

Если двѣ пересѣкающіяся прямыя не перпендикулярны другъ къ другу, то онѣ называются *наклонными* прямыми. Напр. AB наклонна къ EF. Когда говорится не о всей наклонной AB, а только о части ея, напр. AO, то точка O называется *основаніемъ* наклонной AO.

§ 35. Если требуется чрезъ какую нибудь точку прямой CD (чер. 36), напр. чрезъ точку O, провести перпендикуляръ AO къ CD, то говорятъ: изъ точки O *возставить перпендикуляръ* къ CD.

Чер. 36.

Теорема 1. *Чрезъ точку, взятую на прямой, можно провести только одну линію перпендикулярную къ этой прямой, или, можно возставить только одинъ перпендикуляръ къ прямой.*

Пусть дана прямая CD (чер. 35) и точка O на этой прямой; требуется доказать, что чрезъ эту точку можно провести только одну прямую перпендикулярную къ CD.

Доказ. Если AB⊥CD, то всѣ углы, образуемые пересѣченіемъ этихъ двухъ прямыхъ,—прямые. Всякая другая прямая, которая проходитъ черезъ точку O, напр. прямая EF, не составитъ съ прямой CD прямыхъ угловъ, потому что ∠EOD<∠AOD (акс. 8), т. е. ∠EOD острый, и слѣдов. прямая EF не будетъ перпендикулярная, а будетъ наклонная къ CD.

Теорема 2. *Всякая точка перпендикуляра, возставленнаго изъ средины прямой, находится въ равномъ разстояніи отъ обоихъ концовъ прямой.*

Пусть дана прямая AB (чер. 37) и чрезъ средину ея O проведена прямая CD⊥AB; требуется доказать, что всякая точка I, взятая гдѣ нибудь на CD, находится въ равномъ разстояніи отъ точекъ A и B, т. е., что IA=IB.

Чер. 37.

Доказ. Перегнемъ всю плоскость по прямой CD и наложимъ одну часть плоскости на другую, напр. правую на лѣвую. При этомъ прямая CD и точки O и I останутся неподвижными; прямая OB пойдетъ по прямой OA, потому что ∠BOC=∠COA (§ 32, теор. 1), точка B упадетъ въ точку A, потому что OB=OA, и слѣдов. концы прямой IB совмѣстятся съ концами прямой IA. Значитъ вся прямая IB совмѣстится съ IA (§ 13, теор. I), и слѣдов. IA=IB (§ 14), что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Всякая точка, которая не лежитъ на перпендикуляръ, возставленномъ изъ средины прямой, не находится въ равномъ разстояніи отъ концовъ прямой, а ближе къ тому изъ двухъ концовъ, на сторонѣ котораго отъ перпендикуляра лежитъ точка.*

Пусть O есть средина AB (чер. 38) и CD⊥AB; требуется доказать, что всякая точка, напр. точка I, которая не лежитъ на CD, ближе къ B, чѣмъ къ A, т. е., что IB<IA.

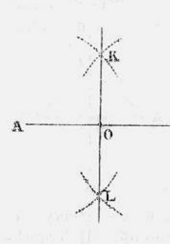
Чер. 38.

Доказ. Означимъ буквою G точку пересѣченія AI съ CD и соединимъ G съ B прямою GB. Кратчайшее разстояніе между точками I и B есть прямая IB (§ 13, теор. 2, слѣд.), слѣдовательно IB<IG+GB. Но точка G лежитъ на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины AB, и, по предыдущей теоремѣ, GB=GA, а потому (акс. 7): IB<IG+GA, или IB<IA, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Изъ двухъ послѣднихъ теоремъ слѣдуетъ, что только точки, лежащія на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины прямой AB, находятся въ равномъ разстояніи отъ A и B, а потому говорятъ, что *перпендикуляръ, возставленный изъ средины прямой, соединяющей двѣ данныя точки, есть мѣсто всѣхъ точекъ, изъ которыхъ каждая лежитъ въ равномъ разстояніи отъ двухъ данныхъ точекъ.*

Задача 1. *Изъ средины прямой* AB (чер. 39) *возставить перпендикуляръ къ этой прямой.*

Чер. 39.



Рѣш. Опишемъ изъ точекъ A и B, какъ центровъ, радіусомъ произвольнымъ, но большимъ половины AB двѣ дуги вверхъ и тѣмъ же радіусомъ двѣ дуги внизъ (или другимъ радіусомъ вверхъ или внизъ) и соединимъ точки ихъ пересѣченія K и L прямою KL, которая и будетъ перпендикуляромъ, возставленнымъ изъ средины AB, потому что точки K и L находятся въ равномъ разстояніи отъ A и B, и слѣдовательно, по доказанной теоремѣ, лежатъ на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины AB.

Задача 2. *Конечную прямую* AB *раздѣлить пополамъ.* *Рѣш.* Поступимъ такъ же, какъ въ задачѣ 1-ой; тогда точка пересѣченія O прямыхъ AB и KL будетъ искомая, потому что точки K и L принадлежатъ перпендикуляру, проходящему чрезъ средину AB.

Задача 3. *Изъ какой нибудь точки* O *прямой* XY (чер. 40) *возставить перпендикуляръ къ прямой.*

Чер. 40.

Рѣш. Отложимъ отъ точки O двѣ произвольныя и равныя прямыя OA и OB; тогда вопросъ сводится къ задачѣ 1.

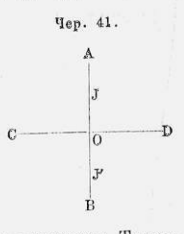
§ 36. Если требуется чрезъ точку, взятую внѣ данной прямой, провести прямую перпендикулярную къ данной, то говорятъ: изъ точки *опустить перпендикуляръ* на прямую.

Теорема. *Чрезъ точку, взятую внѣ прямой, можно провести только одну линію перпендикулярную къ прямой, или можно опустить только одинъ перпендикуляръ на прямую.*

Пусть дана прямая CD (черт. 41) и точка A внѣ прямой; требуется доказать, что чрезъ точку A можно провести только одну линію перпендикулярную къ CD.

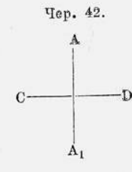
Доказ. Замѣтимъ предварительно, что если $AB \perp CD$, то $\angle AOD = \angle DOB$ (§ 34); а потому, если перегнемъ плоскость по прямой CD такъ, что наложимъ одну половину ея на другую (напр. верхнюю на нижнюю), то OA пойдетъ по своему продолженію OB, причемъ всякая точка, гдѣ нибудь взятая на AB въ верхней плоскости, напр. точка J, упадетъ на туже безконечную линію AB, напр. въ точку J′ въ нижней части плоскости.

Чер. 41.



Теперь докажемъ, что чрезъ точку A (черт. 42) можно провести только одну прямую перпендикулярную къ CD. По условію линія, перпендикулярная къ CD, должна пройти чрезъ точку A; а по вышесказанному она должна пройти и чрезъ точку A_1, въ которую упадетъ точка A, если мы верхнюю часть плоскости наложимъ на нижнюю. Притомъ перпендикулярная должна быть прямая, а чрезъ двѣ точки A и A_1 нельзя провести болѣе одной прямой (§ 12), и слѣдовательно нельзя чрезъ точку, взятую внѣ данной прямой, провести болѣе одной прямой перпендикулярной къ данной.

Чер. 42.



§ 37. *Длиною перпендикуляра*, опущеннаго изъ точки A (чер. 43) на прямую CD, называется разстояніе точки A отъ прямой CD по перпендикулярной линіи, проведенной чрезъ A къ CD, т. е., длина AO. *Длиною наклонной* AG называется разстояніе точки A до прямой CD по наклонной линіи, т. е., длина AK.

Чер. 43.

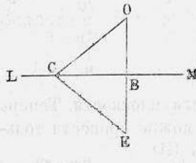
Разстояніе KO отъ основанія перпендикуляра до основанія наклонной называется *проложеніемъ* (проэкціей—projectio) длины AK наклонной на прямую CD. Вообще, *проложеніемъ конечной прямой*, напр. MN, на какую нибудь прямую CD называется разстояніе PQ между основаніями пер-

пендикуляровъ, опущенныхъ изъ концовъ M и N конечной прямой на прямую CD.

Теорема. *Кратчайшее разстояніе точки отъ прямой есть длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки на прямую.*

Пусть будетъ OB (чер. 44) длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки O на LM; OC длина какой нибудь наклонной, проведенной чрезъ точку O; требуется доказать, что OB<OC.

Чер. 44.



Доказ. Отложимъ на продолженіи BO длину BE равную BO и точку E соединимъ съ точкою C прямою EC. Кратчайшее разстояніе между двумя точками O и E есть прямая, соединяющая эти точки (§ 13, слѣд.) и слѣдовательно: OE<OC+CE. Но OC=CE, потому что LM есть перпендикуляръ, возставленный изъ средины прямой OE, и точка C этого перпендикуляра находится въ равномъ разстояніи отъ точекъ O и E, концовъ прямой OE (§ 35, теор. 2). Такимъ образомъ OC+CE=2OC; притомъ OE=2OB, и слѣдов. 2OB<2OC, а потому и OB<OC (акс. 5), что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Такъ какъ изъ точки, взятой внѣ прямой, можно опустить только одинъ перпендикуляръ на прямую (§ 36), то, значитъ, *существуетъ только одно кратчайшее разстояніе точки отъ прямой линіи, а именно—длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки на прямую.*

Если говорятъ: разстояніе точки отъ прямой, то должно разумѣть кратчайшее разстояніе, или длину перпендикуляра.

Задача. *Изъ точки A, лежащей внѣ прямой CD, опустить перпендикуляръ на CD* (чер. 45).

Чер. 45.

Рѣш. Изъ точки A, какъ центра, произвольнымъ радіусомъ, но только большимъ разстоянія точки A отъ прямой, опишемъ дугу, которая пересѣчетъ прямую CD въ двухъ точкахъ L и M. Принимая эти точки за центры, тѣмъ же самымъ радіусомъ внизъ, или другимъ радіусомъ вверхъ или внизъ, опишемъ двѣ дуги; чрезъ точку ихъ пересѣченія K и чрезъ точку A проведемъ прямую, которая будетъ иско-

мая, потому что точки A и K находятся въ равномъ разстояніи отъ L и M, а слѣдов. принадлежатъ перпендикуляру, возставленному изъ средины LM (§ 35, слѣд.).

§ 38. Если изъ точки, взятой внѣ прямой, опустимъ на прямую перпендикуляръ и проведемъ къ ней наклонныя, то:

Теорема 1. *Наклонныя, которыхъ проложенія равны, имѣютъ равную длину.*

Пусть AB есть перпендикуляръ, опущенный изъ точки A на CD (чер. 46), и дано, что BK=BL; требуется доказать, что AK=AL.

Чер. 46.

Доказ. Перпендикуляръ AB проходитъ чрезъ средину KL, и слѣдов. точка A находится въ равномъ разстояніи отъ точекъ K и L (§ 35), т. е., AK=AL.

Теорема 2, *обр. Наклонныя равной длины имѣютъ равныя проложенія.*

Дано AK=AL и требуется доказать, что BK=BL.

Доказ. Если изъ средины прямой KL возставимъ перпендикуляръ, то онъ пройдетъ чрезъ точку A, потому что AK=AL (§ 35). Слѣдовательно перпендикуляръ этотъ есть AB (§ 36) и точка B лежитъ на срединѣ KL, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. *Изъ точки, взятой внѣ прямой, нельзя провести болѣе двухъ наклонныхъ равной длины.*

Теорема 3. *Изъ двухъ наклонныхъ та, которой проложеніе больше, длиннѣе.*

Пусть дано BK>BL (чер. 47) и требуется доказать, что AK>AL.

Чер. 47.

Доказ. Если изъ средины O прямой KL возставимъ къ ней перпендикуляръ OG, то, по теор. 3 § 35, имѣемъ AK>AL, что и требовалось доказать.

Теорема 4, *обр. Изъ двухъ наклонныхъ та, которая длиннѣе, имѣетъ большее проложеніе.*

Пусть дано AK>AL и требуется доказать, что BK>BL.

Доказ. BK не можетъ быть равно BL, потому что тогда и AK была бы равна AL (теор. 1). BK не можетъ быть меньше

BL, потому что тогда и AK была бы меньше BL (теор. 3). Если же BK не равна и не меньше BL, то BK>BL (акс. 9), что и требовалось доказать.

§ 39. *Равнодѣлящею угла* или *бисекторомъ угла* (bissector) называется прямая, проходящая чрезъ вершину и дѣлящая уголъ пополамъ.

Теорема. *Равнодѣлящія смежныхъ угловъ перпендикулярны другъ къ другу.*

Пусть ∠ABC и ∠CBD (чер. 48) суть смежные углы, прямая BK дѣлитъ ∠ABC пополамъ; прямая BL дѣлитъ ∠CBD пополамъ. Требуется доказать, что BK⊥BL, т. е., что ∠KBL прямой.

Чер. 48.

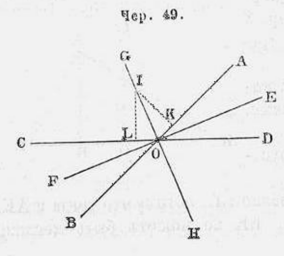
Доказ. ∠ABC + ∠CBD = 2*d* (§ 32, теор. 2), но ∠ABC = ∠ABK + ∠KBC = 2∠KBC, такъ какъ по условію BK дѣлитъ ∠ABC пополамъ. Такимъ же образомъ ∠CBD = 2∠CBL и ∠ABC пополамъ. Такимъ же образомъ ∠CBD = 2 ∠CBL и слѣдов. (акс. 7) 2∠KBC + 2∠CBL = 2*d* или 2 KBL = 2*d* или (акс. 4) ∠KBL = *d*, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. *Равнодѣлящія четырехъ угловъ, образуемыхъ двумя пересѣкающимися прямыми, составляютъ двѣ прямыя перпендикулярныя другъ къ другу.*

§ 40. **Теорема 1.** *Всякая точка, лежащая на одной изъ равнодѣлящихъ угловъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ, находится въ равномъ разстояніи отъ этихъ прямыхъ.*

Пусть даны двѣ пересѣкающіяся прямыя AB и CD (чер. 49); прямыя EF и GH суть равнодѣлящія угловъ; требуется доказать, что если изъ какой нибудь точки одной изъ двухъ равнодѣлящихъ, напр. изъ точки I равнодѣлящей GH, опустимъ перпендикуляры IK и IL на прямыя AB и CD, то длины этихъ перпендикуляровъ равны, т. е. IK = IL.

Чер. 49.



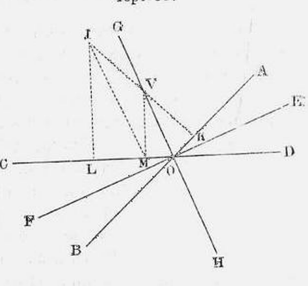
Доказ. Прямая OG есть равнодѣлящая ∠AOC и слѣдов. ∠AOG = ∠COG, а потому если перегнемъ чертежъ по прямой OG и наложимъ ∠COG на ∠AOG, то эти углы, какъ равные, совмѣстятся (§ 28). Но изъ точки I

можно опустить только одинъ перпендикуляръ на прямую OA (§ 36), и слѣдовательно IL совмѣстится съ IK, а потому IL = IK (§ 14), что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Всякая точка, которая не лежитъ на одной изъ равнодѣлящихъ угловъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ, не находится въ равномъ разстояніи отъ этихъ прямыхъ, а лежитъ ближе къ одной, чѣмъ къ другой.*

Пусть (чер. 50) EF и GH равнодѣлящія угловъ двухъ прямыхъ AB и CD. Требуется доказать, что длины перпендикуляровъ IL и IK, опущенныхъ изъ какой нибудь точки I, не лежащей на EF и GH, на прямыя AB и CD, не равны между собою, т. е. что IK не равна IL.

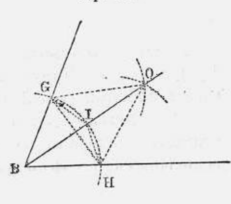
Чер. 50.



Доказ. Опустимъ изъ точки пересѣченія V перпендикуляра IK съ равнодѣлящею OG перпендикуляръ VM на прямую CD; тогда, по предыдущей теоремѣ, VK = VM, такъ какъ V лежитъ на равнодѣлящей. Притомъ IV + + VM > IM (§ 13, слѣд.) или IV + VK > IM (акс. 7) или IK > IM. Но IM > IL, потому что IL перпендикуляръ къ CD и значитъ IM наклонная (§ 37). Слѣдовательно и подавно IK > IL, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Изъ двухъ послѣднихъ теоремъ слѣдуетъ, что только точки равнодѣлящихъ угловъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ находятся въ равномъ разстояніи отъ обѣихъ прямыхъ, а потому говорятъ, что *равнодѣлящія угловъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ суть мѣста всѣхъ точекъ, находящихся въ равномъ разстояніи отъ этихъ прямыхъ.*

Чер. 51.



Задача. *Построить равнодѣлящую угла* B, *или раздѣлить уголъ* B *пополамъ* (чер. 51).

Рѣш. Изъ вершины B, какъ центра, произвольнымъ радіусомъ опишемъ дугу GH. Потомъ изъ то-

чекъ G и H, какъ центровъ, произвольнымъ же радіусомъ, но большимъ половины разстоянія GH, опишемъ двѣ дуги и точку ихъ пересѣченія O соединимъ съ вершиною угла B; прямая BO есть равнодѣлящая угла B. Дѣйствительно, такъ какъ BG=BH и OG=OH, то BO есть перпендикуляръ чрезъ средину прямой GH (§ 35), и слѣдовательно IG=IH (§ 35, теор. 2). Если же хорды IG и IH равны, то и $\smile IG = \smile IH$ (§ 22, теор. 2), а потому и $\angle GBI = \angle IBH$ (§ 28, теор. 2), т. е. BO есть равнодѣлящая $\angle B$.

Прямыя параллельныя.

§ 41. *Двѣ прямыя линіи называются параллельными* (παρά, рядомъ, и ἀλλήλων, другъ друга) (§ 26), *если онѣ лежатъ въ одной плоскости и не встрѣчаются при своемъ продолженіи въ ту и въ другую сторону.*

Для обозначенія параллельности линій употребляется знакъ ||. Напр. AB || CD значитъ, что AB и CD параллельны между собою (чер. 52). Если двѣ прямыя, напр. AB и CD, пересѣчены третьей прямой EF (чер. 53), то линію EF называютъ *пересѣкающей*.

Чер. 52.

A B C D

Пересѣкающая образуетъ съ двумя прямыми 8 угловъ, а именно углы: $a, b, c, l, a', b', c', l'$; этимъ угламъ даютъ три рода названій, разсматривая ихъ по два вмѣстѣ.

Чер. 53.

E B A C D F

1. *Накрестъ-лежащими* углами называются четыре пары: a и a'; или b и b'; или c и c'; или l и l'; притомъ первыя двѣ пары называются *внутренними* на крестъ лежащими, вторыя—*внѣшними*.

2. Углами *соотвѣтственными* называются пары: l и b'; или l' и b; или a и c'; или a' и c.

3. *Односторонними*—пары: a и b'; или a' и b; или l и c'; или l' и c. Притомъ, первыя двѣ пары—*внутренними* односторонними, послѣднія двѣ пары—*внѣшними*.

§ 42. Доказательства всѣхъ теоремъ, до сихъ поръ изложенныхъ, основаны на аксіомахъ § 10; но теорія линій параллельныхъ и слѣдовательно всѣ дальнѣйшія теоріи, осно-

ванныя на ней, не могутъ быть доказаны безъ новаго положенія. Старанія геометровъ стараго и новаго времени вывести всѣ геометрическія теоремы независимо отъ новаго положенія остались безъ успѣха. Это объясняется тѣмъ, что истины § 10 выведены изъ наблюденій надъ конечными величинами и относятся только къ послѣднимъ; въ начальной же геометріи изучаются углы, т. е. безконечныя части плоскости, и примѣненіе къ послѣднимъ аксіомъ, справедливость которыхъ для величинъ безконечныхъ ничѣмъ не подтверждена, часто приводитъ къ ложнымъ выводамъ. Стремленіе вывести всѣ свойства угловъ независимо ни отъ какого положенія равносильно стремленію построить теорію безъ всякихъ данныхъ. Такимъ образомъ остается только сдѣлать выборъ истины, которая будетъ служить основаніемъ дальнѣйшему ученію; за такую истину мы будемъ принимать слѣдующую:

Аксіома 11. *Большій уголъ не можетъ заключаться внутри меньшаго.* Такъ, внутри неопредѣленной части плоскости ABC (чер. 54) можетъ помѣщаться только уголъ или равный данному, какъ напр. $\angle A_1B_1C_1$, или меньшій даннаго, но не большій его.

Чер. 54.

A A₁ B₁ C₁ B C

PS. Эту аксіому не должно считать слѣдствіемъ аксіомы 8 (§ 10), такъ какъ послѣдняя относится только къ величинамъ конечнымъ.

§ 43. **Теорема 1.** *Двѣ прямыя линіи, перпендикулярныя къ третьей прямой, параллельны между собою.* Пусть дано AB⊥EF и CD⊥EF; требуется доказать, что AB || CD (чер. 55).

Чер. 55.

E P A B Q C D F

Доказ. Если предположимъ, что AB не параллельна CD, то эти двѣ линіи встрѣтятся между собою въ какой нибудь точкѣ и тогда чрезъ эту точку будутъ проходить двѣ линіи, перпендикулярныя къ EF, что невозможно (§ 36). Слѣдов. AB и CD встрѣтиться не могутъ, а потому онѣ параллельны между собою.

Теорема 2, *обр. Если двѣ прямыя линіи параллельны между собою, то всякая третья прямая, перпендикулярная къ одной изъ нихъ, перпендикулярна и къ другой.*

Пусть дано AB || CD и EF⊥AB; требуется доказать, что EF⊥CD.

Доказ. Если предположимъ, что EF наклонна къ CD, то смежные углы: ∠CQF и ∠DQF не равны между собою и слѣдов. одинъ изъ этихъ угловъ больше, а другой меньше прямаго, такъ какъ ихъ сумма$=2d$ (§ 32, теор. 2). Положимъ, напр., что ∠CQF больше прямаго; то, такъ какъ ∠APF прямой, значитъ ∠CQF>∠APF. Но углы CQF и APF имѣютъ общую сторону PF и двѣ другія стороны ихъ PA и QC по условію параллельны, т. е. уголъ CQF будетъ постоянно лежать внутри угла APF сколько бы мы ни продолжали стороны этихъ угловъ, а потому невозможно допустить, чтобы ∠CQF былъ больше ∠APF (§ 42, аксіома 11). Слѣдов. невозможно допустить, что EF наклонна къ CD, а потому EF перпендикулярна къ CD, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1. *Чрезъ точку, взятую внѣ прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой.* Дѣйствительно, если предположимъ, что чрезъ точку A (чер. 56) проведены двѣ линіи AB и AK, параллельныя прямой CD, то каждая изъ этихъ двухъ линій будетъ, по доказанной теоремѣ, перпендикулярна къ линіи AH, перпендикуляру, опущенному изъ точки A на CD, что невозможно (§ 35, теор. I).

Чер. 56.

Слѣдствіе 2. *Двѣ прямыя, параллельныя третьей, параллельны между собой.* Дѣйствительно, если бы эти двѣ прямыя (чер. 57) AB и CD, параллельныя EF, встрѣтились въ какой нибудь точкѣ O, то чрезъ эту точку проходили бы двѣ прямыя линіи, параллельныя EF, что противно 1-му слѣдствію.

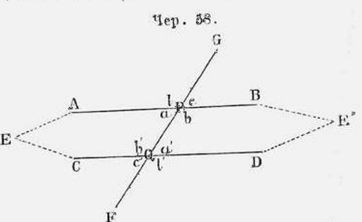
Чер. 57.

Теорема 3. *Двѣ прямыя параллельны, если онѣ образуютъ съ пересѣкающей ихъ прямой равные накрестъ лежащіе углы.*

Положимъ (чер. 58), что AB и CD пересѣчены прямой GF въ точкахъ P и Q и что внутренніе накрестъ лежащіе углы, напр. a и a', равны между собою; требуется доказать, что AB || CD.

Доказ. Предварительно замѣтимъ, что при $a=a'$ будетъ и $b=b'$, потому что $a+b=2d$ и $a'+b'=2d$ (§ 32, теор. 2); откуда $a+b=a'+b'$ (акс. I), или $b=b'$ (акс. 2). Теперь предположимъ, что прямыя AB и CD при продолженіи гдѣ нибудь встрѣчаются, напр. съ лѣвой стороны сѣкущей GF въ какой нибудь точкѣ E; тогда по лѣвую сторону GF чрезъ концы отрѣзка PQ будутъ проходить двѣ прямыя: одна PA, образующая уголъ a, и другая QC, образующая уголъ b' съ отрѣзкомъ PQ, и эти двѣ прямыя будутъ пересѣкаться слѣва отъ GF въ точкѣ E. Но съ правой стороны отъ сѣкущей GF чрезъ концы того же отрѣзка PQ проходятъ тоже двѣ прямыя: одна QD, образующая съ отрѣзкомъ уголъ a', равный, по условію, углу a, и другая PB, образующая съ отрѣзкомъ уголъ b, равный, по выше сказанному, углу b'. Если первыя двѣ прямыя пересѣкаются съ лѣвой стороны отъ GF, то и двѣ вторыя прямыя QD и PB тоже пересѣкутся съ правой стороны отъ GF, напр. въ нѣкоторой точкѣ E', такъ какъ онѣ проходятъ чрезъ концы того же отрѣзка PQ и образуютъ съ нимъ тѣже самые углы $a'=a$ и $b=b'$. Такимъ образомъ, если допустимъ, что прямыя AB и CD пересѣкаются по одну сторону сѣкущей GF, то онѣ необходимо должны пересѣчься и по другую сторону ея. Но двѣ прямыя AB и CD не могутъ пересѣкаться въ двухъ точкахъ E и E', а потому нельзя допустить, чтобы прямыя AB и CD гдѣ нибудь встрѣтились при своемъ продолженіи, и слѣдовательно AB || CD.

Чер. 58.



Подобнымъ же образомъ докажемъ, что если внѣшніе накрестъ лежащіе углы равны, то AB || CD. Слѣдов. вообще AB || CD, если существуетъ одно изъ четырехъ равенствъ:

(1) $a=a'$; (2) $b=b'$; (3) $c=c'$ и (4) $l=l'$.

Другое доказ. Пусть будетъ I средина PQ (чер. 59), т. е. пусть PI=QI. Опустимъ изъ точки I перпендикуляры IU и IT на стороны равныхъ угловъ и докажемъ, что эти перпендикуляры лежать въ одной прямой. Въ самомъ дѣлѣ: наложимъ ∠APF на ∠DQE такъ, чтобы эти углы совпали, т. е. чтобы вершина P упала въ вершину

Q и чтобы сторона PA пошла по сторонѣ QD, тогда (по равенству угловъ) сторона PF пойдетъ по сторонѣ QE и прямая PI совмѣстится съ QI (потому что PI=QI). Но изъ точки I на прямую CD можно опустить только одинъ перпендикуляръ (§ 36), а потому прямая IU пойдетъ по IT, причемъ ∠PIU совмѣстится съ ∠QIT, и слѣдовательно эти два угла равны между собою (§ 28). Если же ∠PIU=∠QIT, то IT лежитъ въ одной прямой съ IU (§ 33, теор. 2, слѣдствіе). Такимъ образомъ оба перпендикуляра составляютъ одну прямую UT; линіи AB и CD перпендикулярны къ этой прямой и слѣдовательно параллельны между собою (§ 43, теор. I), что и требовалось доказать.

Чер. 59.

Теперь докажемъ, что если какіе нибудь два накрестъ лежащіе угла равны, то линіи параллельны. То есть AB || CD, если существуетъ одно изъ 4-хъ равенствъ:

(1) $a=a'$; (2) $b=b'$; (3) $c=c'$ и (4) $l=l'$.

Мы доказали, что если $a=a'$, то AB || CD. Пусть $b=b'$ или пусть $l=l'$, то будетъ и $a=a'$ (какъ смежные первымъ) и слѣдовательно AB || CD. Если же $c=c'$, то и $a=a'$ (какъ вертикальные первымъ); а потому AB || CD.

Теорема 4, *обр. Двѣ параллельныя прямыя, пересѣченныя третьей, имѣютъ равные накрестъ лежащіе углы.*

Пусть (чер. 60) дано: AB || CD; требуется доказать, что существуетъ каждое изъ 4-хъ равенствъ:

(1) $a=a'$; (2) $b=b'$; (3) $c=c'$ и (4) $l=l'$.

Чер. 60.

Доказ. Положимъ, что одно изъ 4-хъ равенствъ, напр. 1-е, несправедливо, т. е. что a не равно a', а напр. $a < a'$, и отложимъ ∠FOK равный a', тогда по теоремѣ 3-ей прямыя OK и CD будутъ параллельны между собою, такъ какъ имѣютъ равные накрестъ лежащіе углы. Но, по условію, AB || CD и слѣдовательно чрезъ точку O, взятую внѣ прямой CD, будутъ проходить двѣ прямыя OK и AB, параллельныя CD, что противно слѣдствію 1 теоремы 2; а потому уголъ a не можетъ быть меньше угла a'. Такимъ же образомъ докажемъ, что a не можетъ быть больше a', и слѣдовательно $a=a'$ (акс. 9).

Совершенно такъ же докажемъ, что $b=b'$; $c=c'$ и $l=l'$ и слѣдовательно теорема доказана.

Задача. *Чрезъ точку A, лежащую внѣ прямой CD, провести прямую, параллельную CD.* (чер. 61).

Рѣш. Чрезъ точку A проведемъ AF, пересѣкающую данную прямую CD подъ нѣкоторымъ угломъ AFC, и построимъ на прямой AF при точкѣ A уголъ KAF, равный углу AFC (§ 28, задача) и накрестъ лежащій ему. Прямая AK есть искомая, потому что ∠KAF=∠AFC и слѣдовательно, по теор 3, прямая AK || CD.

Чер. 61.

Теорема 5. *Двѣ прямыя параллельны, если образуютъ съ пересѣкающей ихъ прямой равные соотвѣтственные углы.*

Дано (чер. 60) одно изъ четырехъ равенствъ:

(1) $a=c'$; (2) $a'=c$; (3) $b=l'$ и (4) $b'=l$.

Требуется доказать, что AB || CD.

Доказ. Если есть два равные соотвѣтственные угла, то легко доказать, что есть и два равные накрестъ лежащіе угла и слѣдовательно, по теоремѣ 3-й, AB || CD. Такъ положимъ, что $a=c'$, то, по равенству вертикальныхъ угловъ (§ 33, теор. I), имѣемъ и $a'=c'$; откуда слѣдуетъ, что $a=a'$ (акс. 1). Если же $a=a'$, то по теор. 3-ей AB || CD.

Теорема 6, *обр. Двѣ параллельныя прямыя, пересѣченныя третьей, имѣютъ равные соотвѣтственные углы.*

Дано (чер. 60) AB || CD и требуется доказать, что существуетъ каждое изъ 4-хъ равенствъ:

(1) $a=c'$; (2) $a'=c$; (3) $b=l'$ и (4) $b'=l$.

Доказ. Такъ какъ AB || CD, то, по теоремѣ 4-й, накрестъ лежащіе углы равны. Если же накрестъ лежащіе углы равны, то легко видѣть, что каждое изъ 4-хъ равенствъ существуетъ. Напр. докажемъ, что существуетъ (1) равенство: въ самомъ дѣлѣ $a=a'$, какъ накрестъ лежащіе углы (теор. 4), и $c'=a'$, какъ вертикальные (§ 33, теор. I); слѣдовательно $a=c'$ (акс. 1), что есть 1-е равенство.

Теорема 7. *Двѣ прямыя параллельны, если онѣ образуютъ съ пересѣкающей односторонніе углы, сумма которыхъ составляетъ два прямыхъ угла.*

Пусть дано одно изъ 4-хъ равенствъ (чер. 60).

(1) $a+b'=2d$; (2) $a'+b=2d$; (3) $c+l'=2d$ и (4) $c'+l=2d$.

Требуется доказать, что AB || CD.

Доказ. Легко видѣть, что если существуетъ одно изъ 4-хъ

равенствъ, то существуетъ и два равныхъ накрестъ лежащихъ угла, и слѣдов. по теор. 3-ей AB || CD. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что существуетъ равенство (1), т. е. $a+b'=2d$, и такъ какъ углы a и b смежные, то $a+b=2d$ (§ 32, теор. 2), откуда слѣдуетъ (акс. 1), что $a+b'=a+b$, или (акс. 2) $b=b'$, т. е. накрестъ лежащіе углы равны, а потому AB || CD.

Теорема 8, *обр. Двѣ параллельныя прямыя, пересѣченныя третьей, имѣютъ одностороннія углы, сумма которыхъ составляетъ два прямыхъ угла.*

Пусть дано AB || CD (черт. 60) и требуется доказать, что существуетъ каждое изъ 4-хъ равенствъ:

(1) $a+b'=2d$; (2) $a'+b=2d$; (3) $c+l'=2d$ и (4) $c'+l=2d$.

Доказ. Если AB || CD, то, по теор. 4, накрестъ лежащіе углы равны. Но если накрестъ лежащіе углы равны, то легко видѣть, что существуетъ каждое изъ 4-хъ равенствъ. Такъ докажемъ, что существуетъ (1) равенство: въ самомъ дѣлѣ, $b=b'$, какъ накрестъ лежащіе; но $a+b=2d$, какъ смежные, слѣдовательно и $a+b'=2d$ (акс. 7), что есть равенство 1-е.

Теорема 9. *Двѣ прямыя параллельны, если двѣ какія нибудь точки одной прямой находятся въ равномъ разстояніи отъ другой прямой, не проходящей между этими точками.*

Пусть точки P и Q прямой AB (чер. 62) находятся въ равномъ разстояніи отъ прямой CD, т. е. пусть длины перпендикуляровъ PR и QS, опущенныхъ изъ точекъ P и Q на CD, равны между собою (§37); требуется доказать, что AB || || CD.

Чер 62.

Доказ. Соединимъ точки P и S прямою PS и замѣтимъ, что такъ какъ, по условію, PR и QS перпендикулярны къ CD и, значитъ, параллельны между собою (теор. 1), то углы QSP и RPS, какъ накрестъ лежащіе, равны между собою. Теперь наложимъ уголъ QSP на уголъ RPS такъ, чтобы вершина S упала въ вершину P и чтобы прямая SQ пошла по прямой PR, причемъ по равенству этихъ прямыхъ точка Q упадетъ въ точку R; по равенству угловъ QSP и RPS прямая SP пойдетъ по PS и точка P упадетъ въ точку S. Такимъ образомъ прямая PQ совмѣстится съ прямой

SR (§ 13. теор. I), $\angle SQP$ совмѣстится съ $\angle PRS$, а потому $\angle SQP=\angle PRS$. Но, по условію, $\angle PRS$ прямой, слѣдовательно и $\angle SQP$ тоже прямой, т. е. $AB\perp QS$. Если же двѣ прямыя AB и CD перпендикулярны къ третьей прямой QS, то онѣ параллельны между собою (теор. 1), что и требовалось доказать.

Теорема 10, *обр. Всѣ точки одной изъ двухъ параллельныхъ прямыхъ находятся въ равномъ разстояніи отъ другой прямой.*

Пусть (чер. 63) AB || CD и требуется доказать, что всѣ точки AB находятся въ равномъ разстояніи отъ CD, т. е. что длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ двухъ какихъ нибудь точекъ P и Q прямой AB на CD, равны между собою, или что PR=QS.

Чер. 63.

Доказ. Положимъ, что PR>QS. Отложимъ на PR отъ точки R длину RE равную SQ и проведемъ чрезъ точки Q и E прямую QE, тогда, по теор. 9, прямая QE будетъ параллельна CD; но по условію AB || CD и слѣдовательно чрезъ точку Q проходили бы двѣ прямыя, параллельныя CD, что невозможно (теор. 2, слѣд. I), и, значитъ, PR не можетъ быть больше QS. Такимъ же образомъ докажемъ, что PR не можетъ быть меньше QS. Если же PR ни больше и ни меньше QS, то PR равно QS (акс. 9), что и требовалось доказать.

Задача *Найти геометрическое мѣсто точекъ, находящихся на данномъ разстояніи a отъ данной прямой AB.*

Рѣш. Изъ какой нибудь точки E прямой AB (чер. 64) возставимъ перпендикуляръ GH къ AB и на немъ отложимъ отъ точки E двѣ длины EK=EL=a. Чрезъ K и L проведемъ прямыя параллельныя AB; эти прямыя PQ и RS представляютъ собою искомое мѣсто точекъ, находящихся на разстояніи a отъ прямой AB.

Чер. 64.

Углы съ параллельными и перпендикулярными сторонами.

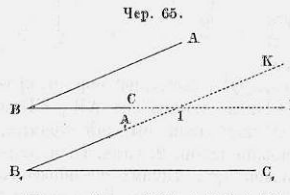
§ 44. Назовемъ два угла *однородными*, если они оба острые или оба тупые, или оба прямые, въ противномъ-же случаѣ—*разнородными*, и докажемъ слѣдующія теоремы:

Теорема 1. *Углы съ параллельными сторонами равны, если они однородные, или составляютъ два прямыхъ, если они разнородные.*

Пусть (чер. 65) $AB \parallel A_1B_1$ и $BC \parallel B_1C_1$, притомъ углы однородные. Требуется доказать, что $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Доказ. Прямая B_1C_1, по условію, параллельна BC, и слѣдовательно B_1A_1 не параллельна BC (§ 43, теор. 2, слѣд. I), а потому прямыя BC и B_1A_1 при продолженіи пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ I. Такъ какъ $AB \parallel A_1B_1$, то $\angle ABC = \angle KIL$, какъ углы соотвѣтственные (§43, теор. 6). На томъ-же основаніи $\angle A_1B_1C_1 = \angle KIL$, откуда (акс. 1) $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

Чер. 65.



Пусть (чер. 66) $AB \parallel A_1B_1$ и $BC \parallel B_1C_1$, но углы разнородные; требуется доказать, что $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 2d$.

Чер. 66.

Доказ. Продолжимъ сторону B_1A_1 по направленію B_1K, то тогда: $\angle A_1B_1C_1 + \angle C_1B_1K = 2d$, какъ смежные (§ 32, теор. 2). Но, по доказанному, $\angle ABC = \angle C_1B_1K$; слѣдовательно (акс. 7) $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 2d$.

Теорема 2. *Углы съ перпендикулярными сторонами равны, если они однородные, или составляютъ два прямыхъ, если они разнородные.*

Пусть (чер. 67) $AB \perp A_1B_1$ и $BC \perp B_1C_1$, притомъ углы однородные; требуется доказать, что $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Доказ. Если изъ точки B проведемъ прямыя параллельныя сторонамъ угла $A_1B_1C_1$, то составится уголъ LBK равный $\angle A_1B_1C_1$ по теор. 1. Притомъ, такъ какъ $BL \parallel A_1B_1$, а

по условію $A_1B_1 \perp AB$, то (§ 43, теор. 2) $BL \perp AB$. Такимъ же образомъ докажемъ, что и $BK \perp BC$. Слѣд. углы LBA и KBC суть прямые, а потому они равны, т. е. $\angle LBA = \angle KBC$. Отнимая по $\angle KBA$, получимъ равенство (акс. 2) $\angle LBK = \angle ABC$, или (акс. 7) $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$, что и требовалось доказать.

Чер. 67. Чер. 68.

Пусть (чер. 68) $AB \perp A_1B_1$ и $BC \perp B_1C_1$, и притомъ углы разнородные; требуется доказать, что $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 2d$.

Доказ. Продолжимъ сторону B_1C_1 по направленію B_1E; тогда $\angle A_1B_1C_1 + \angle A_1B_1E = 2d$, какъ смежные, но, по доказанному, $\angle ABC = \angle A_1B_1E$; слѣдоват. (акс. 7) $\angle A_1B_1C_1 + \angle ABC = 2d$, что и требовалось доказать.

ОТДѢЛЪ II.

Свойства и условія равенства прямолинейныхъ фигуръ.

Треугольники.

§ 45. Три прямыя могутъ пересѣкаться не болѣе какъ въ трехъ точкахъ, потому что двѣ прямыя могутъ имѣть только одну общую точку (§ 12) и третья можетъ пересѣчь каждую изъ двухъ только въ одной точкѣ. Взаимнымъ пересѣченіемъ три прямыя ограничиваютъ опредѣленную часть плоскости, которая называется треугольникомъ. Итакъ, *треугольникомъ называется опредѣленная часть плоскости, заключающаяся между тремя пересѣкающимися прямыми.* Пересѣкающіяся прямыя называются *сторонами* треугольника; точки пересѣченія—*вершинами*. Треугольникъ означаютъ тремя буквами, поставленными при вершинахъ, и знакомъ $\triangle$; такъ говорятъ: треугольникъ ABC, и пишутъ: $\triangle ABC$.

§ 46. **Теорема**. *Всякая сторона треугольника меньше суммы двухъ другихъ сторонъ и больше разности ихъ.*

Возьмемъ какую нибудь сторону, напр. AB, въ $\triangle ABC$ (чер. 69) и докажемъ сперва, что $AB < AC + BC$

Доказ. Сторона AB есть кратчайшее разстояніе между точками A и B (§ 13, слѣдст.), а потому AB < AC + BC.

Теперь докажемъ, что AB>AC—BC.

Доказ. Мы уже знаемъ, что AB + BC>AC. Отнимая отъ неравныхъ поровну, по BC, получимъ (акс. 6): AB>AC—BC. Такимъ же образомъ докажемъ и для всякой стороны треугольника.

§ 47. На основаніи предыдущаго § ясно, что изъ всякихъ трехъ прямыхъ можно составить треугольникъ, лишь бы только каждая изъ этихъ трехъ прямыхъ была менѣе суммы двухъ остальныхъ. Причемъ всѣ три прямыя могутъ быть равны между собою, тогда сумма двухъ больше третьей; двѣ изъ нихъ могутъ быть равны между собою, лишь бы ихъ сумма была больше третьей, и наконецъ всѣ три могутъ быть различной длины. Вслѣдствіе этого, по сторонамъ, треугольники дѣлятъ на три рода: *равносторонніе*, у которыхъ всѣ стороны равны между собою; *равнобедренные*, у которыхъ двѣ равныя стороны; и *разносторонніе*, у которыхъ нѣтъ равныхъ сторонъ.

Такъ (чер. 69): △ ABC—равносторонній; △ DEF—равнобедренный и △ KLM—разносторонній. Въ треугольникѣ принимаютъ одну какую нибудь сторону за *основаніе*. Въ равнобедренномъ треугольникѣ за основаніе принимаютъ неравную сторону. *Высотою треугольника* называютъ длину перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины на основаніе или на его продолженіе. Такъ въ △ KLM сторона KM есть основаніе; LH—высота.

Чер. 69.

§ 48. Углы, которые образуются сторонами треугольника, называются *внутренними* углами. Если же продолжимъ одну изъ сторонъ треугольника, напр. (чер. 70) сторону AC по направленію CD, то образуется уголъ BCD, который называютъ внѣшнимъ угломъ треугольника. Слѣдов. *внѣшній уголъ треугольника есть уголъ, образуемый стороною и продолженіемъ другой стороны.*

Всякому внѣшнему углу одинъ изъ внутреннихъ смежный, а остальные два внутренніе—несмежные. Такъ внѣшнему углу BCD—смежный внутренній есть уголъ BCA.

Теорема. *Внѣшній уголъ треугольника равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ ему несмежныхъ.* Въ △ ABC уголъ BCD есть внѣшній и требуется доказать, что ∠ BCD = ∠ BAC + ∠ CBA.

Доказ. Чрезъ точку C проведемъ прямую CE параллельную AB, то ∠ ECD = ∠ BAC, какъ углы соотвѣтственные (§ 43, теор. 6), и ∠ BCE = ∠ CBA, какъ накрестъ лежащіе (§ 43, теор. 4). Складывая, получимъ (акс. 2), ∠ ECD + ∠ BCE = ∠ BAC + ∠ CBA, или ∠ BCD = ∠ BAC + ∠ CBA, что и требовалось доказать.

Чер. 70.

Слѣдствіе. *Если въ треугольникѣ есть одинъ уголъ прямой, или одинъ тупой, то остальные два угла острые.* Потому что внѣшній уголъ, смежный внутреннему прямому углу, есть тоже прямой (§ 32, теор. 2) и такъ какъ этотъ внѣшній уголъ равенъ суммѣ двухъ другихъ внутреннихъ, то послѣдніе—острые. Смежный же внутреннему тупому углу—внѣшній есть острый, а слѣдов. остальные два внутренніе и подавно острые.

§ 49. На основаніи этого въ треугольникѣ не можетъ быть двухъ прямыхъ или двухъ тупыхъ угловъ, или одного прямаго и одного тупаго угла, и треугольники раздѣляются по угламъ на три рода: *остроугольные*, у которыхъ всѣ углы острые; *прямоугольные*, у которыхъ одинъ уголъ прямой, остальные острые; и *тупоугольные*, у которыхъ одинъ уголъ тупой, остальные—острые. Такъ (чер. 71) △ BAC—остроугольный; △ DEF—прямоугольный и △ KLM—тупоугольный.

Чер. 71.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ стороны, прилежащія прямому углу, называются *катетами* (κάθετη — вертикальная линія); противулежащая прямому углу — *гипотенузою* (ὑποτείνω—быть противуположнымъ). Такъ въ △ DEF стороны DE и DF—катеты; сторона EF—гипотенуза.

§ 50. **Теорема.** *Сумма трехъ угловъ (внутреннихъ) треугольника равна двумъ прямымъ угламъ.*

Пусть данъ какой нибудь треугольникъ (чер. 72), углы котораго означимъ буквами a, b и c и требуется доказать, что $a+b+c=2d$.

Чер. 72.

Доказ. По теоремѣ § 48-й $a+b=c'$, или прибавляя къ равнымъ по ровну, по углу c, получимъ равныя (акс. 2), т. е. $a+b+c=c'+c$; но $c'+c=2d$ (§ 32, теор. 2). Слѣдов. (акс. 7) $a+b+c=2d$.

Слѣдствіе 1. *Въ равноугольномъ треугольникѣ каждый уголъ равенъ* $\frac{2}{3}$ *d.*

Слѣдствіе 2. *Въ прямоугольномъ треугольникѣ сумма двухъ острыхъ угловъ равна d.*

§ 51. **Теорема.** *Если при каждой вершинѣ треугольника построимъ по одному внѣшнему углу, то сумма этихъ трехъ внѣшнихъ угловъ равняется четыремъ прямымъ угламъ.*

Пусть данъ треугольникъ, продолжимъ всѣ его стороны (напр. какъ это показано на чер. 73), означимъ образуемые такимъ образомъ внѣшніе углы буквами a', b', c' соотвѣтственно внутреннимъ a, b, c, и докажемъ, что $a'+b'+c'=4d$.

Чер. 73.

Доказ. $a+a'=2d$; $b+b'=2d$ и $c+c'=2d$, какъ смежные (§ 32. теор. 2). Складывая, получимъ (акс. 2): $a+a'+b+b'+c+c'=6d$, но, по теоремѣ § 50, имѣетъ: $a+b+c=2d$. Вычитая изъ равныхъ равныя (акс. 2), получимъ равныя: $a'+b'+c'=4d$.

§ 52. **Теорема 1.** *Въ треугольникѣ противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы.*

Пусть дано (чер. 74) AB=BC и требуется доказать, что $\angle A = \angle C$.

Чер. 74.

Доказ. Если соединимъ прямою BD вершину B съ срединою D основанія AC, то BD будетъ перпендикуляръ, возставленный изъ средины прямой AC, потому что по условію AB=BC, т. е. точка B находится въ равномъ разстояніи отъ концовъ AB (§ 35). Если перегнемъ треугольникъ ABC по прямой BD и наложимъ одну часть его на другую, напр. BCD на BAD, то, по равенству угловъ при D (какъ прямыхъ), DC пойдетъ по DA; точка C упадетъ въ A, такъ какъ D средина AC; прямая BC совмѣстится съ AB, и слѣдоват. $\angle C$ совпадетъ съ $\angle A$, а потому $\angle C = \angle A$, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. *Если треугольникъ равносторонній, то онъ и равноугольный.*

Теорема 2, *обр. Въ треугольникѣ противъ равныхъ угловъ лежатъ равныя стороны.*

Пусть дано (чер. 75) $\angle A = \angle C$ и требуется доказать, что AB=BC.

Доказ. Если предположимъ, что AB не равно BC, напр. AB>BC, то точка B не будетъ лежать на перпендикулярѣ,

возставленномъ изъ средины D прямой AC (§ 35), а будетъ находиться по одну сторону съ точкою C отъ этого перпендикуляра, т. е. перпендикуляръ приметъ нѣкоторое положеніе DE и пересѣчетъ прямую AB въ точкѣ J. Соединивъ J съ C, получимъ AJ=JC, потому что всякая точка перпендикуляра, возстановленнаго изъ средины AC, находится въ равномъ разстояніи отъ концовъ A и C. Если же AJ=JC, то, по теоремѣ 1, $\angle A = \angle JCA$, но $\angle JCA < \angle C$ (акс. 8), слѣдов. $\angle A < \angle C$ (акс. 7), что противно положенію, и, значитъ, нельзя допустить, что BA не равна BC, а потому BA=BC, что и требовалось доказать.

Чер. 75.

Слѣдствіе. *Если треугольникъ равноугольный, то онъ и равносторонній.*

Теорема 3. *Въ треугольникѣ противъ большей стороны лежитъ большій уголъ.*

Пусть дано (чер. 76) AB>BC и требуется доказать, что $\angle C > \angle A$.

Доказ. Перпендикуляръ DE, возставленный изъ D, средины AC, не пройдетъ чрезъ точку B (§ 35), а пересѣчетъ прямую AB въ нѣкоторой точкѣ I; соединяя I съ C, получимъ: AI=IC (§ 35, теор. 2), и слѣдов. $\angle A = \angle ICA$ (теор. 1); но $\angle ICA$ составляетъ часть $\angle C$, а потому (акс. 8) $\angle C > \angle A$.

Чер. 76.

Теорема 4, *обр. Въ треугольникѣ противъ большаго угла лежитъ большая сторона.*

Пусть $\angle C > \angle A$; требуется доказать, что AB>BC.

Доказ. AB не можетъ равняться BC, потому что тогда и $\angle C$ равнялся бы $\angle A$ (теор. 1). AB не можетъ быть <BC, потому что тогда $\angle C$ былъ бы $< \angle A$ (теор. 3). Если же AB не равно и не менѣе BC, то AB>BC (акс. 9).

§ 53. Два треугольника называются *равными* между собою, если они совмѣщаются при наложеніи другъ на друга. Совпадающіе при этомъ углы ихъ и стороны называются *соотвѣтственными* частями равныхъ треугольниковъ.

Теорема 1. *Треугольники равны, если три стороны одного порознь равны тремъ сторонамъ другаго.*

Пусть (чер. 77) дано: AB=A'B'; AC=A'C' и BC=B'C'; требуется доказать, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Доказ. Наложимъ $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ такъ, чтобы точка A' упала въ A и чтобы сторона $A'B'$ пошла по AB (притомъ, чтобы обѣ вершины C' и C были по одну сторону AB), тогда, по равенству AB и $A'B'$, точка B' упадетъ въ B. Предположимъ, что вершина C' не упадетъ въ C, то C' не можетъ упасть на одну изъ сторонъ AC или BC, потому что по условію $AC = A'C'$ и $BC = B'C'$; слѣдов. C' можетъ упасть или внутри или внѣ $\triangle ABC$. Пусть C' упало въ точку G (точка G можетъ лежать и внутри $\triangle ABC$), т. е. пусть $\triangle A'B'C'$ принялъ положеніе $\triangle AGB$. Соединимъ точки C и G прямою CG и потомъ средину E этой прямой соединимъ прямыми EA и EB съ точками A и B. Такъ какъ, по условію, $AC = A'C' = AG$, то $AE \perp CG$ (§ 35); и такъ какъ $BC = B'C' = BG$, то и $EB \perp CG$, что невозможно, потому что чрезъ точку E прямой CG нельзя провести двѣ прямыя EA и EB, перпендикулярныя CG (§ 35, теор. 1). Слѣдов. невозможно допустить, чтобы точка C' не упала въ C, а потому C' упадетъ въ C, причемъ стороны совмѣстятся, такъ какъ ихъ концы совпали (§ 13, теор. 1). Значитъ треугольники совмѣстятся, а потому они равны.

Чер. 77.

Задача 1. *По тремъ даннымъ сторонамъ a, b и c построить треугольникъ.*

Рѣш. Изъ концовъ одной стороны, напр. a, какъ изъ центровъ, радіусами, равными двумъ другимъ сторонамъ b и c, опишемъ дуги и точку ихъ пересѣченія соединимъ прямыми съ концами стороны a.

Рѣшеніе возможно, если каждая изъ сторонъ менѣе суммы двухъ другихъ (§ 47).

Можно построить только одинъ треугольникъ по даннымъ a, b и c (теор. 1).

Теорема 2. *Треугольники равны, если имѣютъ по двѣ порознь равныя стороны и по равному углу, лежащему между ними.*

Чер. 78.

Пусть (чер. 78) дано: $AB = A'B'$; $BC = B'C'$ и $\angle B = \angle B'$; требуется доказать, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Доказ. Наложимъ $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ такъ, чтобы точка B' упала въ B и чтобы сторона $B'A'$ пошла по BA (притомъ, чтобы обѣ вершины C и C' упали по одну сторону прямой AB), тогда точка A' упадетъ въ A, такъ какъ, по условію, $AB = A'B'$; сторона $B'C'$ пойдетъ по BC, такъ какъ $\angle B = \angle B'$; притомъ C' упадетъ въ C, потому что $BC = B'C'$. Если же концы сторонъ $A'C'$ и AC совпали, то и стороны совпадутъ (§ 13, теор. 1). Слѣдов. треугольники совмѣстятся, а потому они равны.

Слѣдствіе. *Прямоугольные треугольники равны, если катеты одного порознь равны катетамъ другаго.*

Задача 2. *Построить треугольникъ по двумъ даннымъ сторонамъ и по данному углу, лежащему между этими сторонами.*

Рѣш. Отъ вершины даннаго угла на сторонахъ его отложимъ двѣ данныя прямыя и концы ихъ соединимъ прямою.

Задача 3. *Построить прямоугольный треугольникъ по двумъ даннымъ катетамъ его.*

Рѣш. Простроимъ прямой уголъ и потомъ поступимъ какъ въ задачѣ 2-й.

Теорема 3. *Треугольники равны, если имѣютъ по двѣ порознь равныя стороны и по равному углу, лежащему противъ той изъ двухъ сторонъ, которая больше или равна другой.*

Пусть (чер. 79) дано $AB = A'B'$; $BC = B'C'$ и $\angle C = \angle C'$, притомъ AB или больше или равна BC, а слѣд. и $A'B'$ или больше, или равна $B'C'$. Требуется доказать, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Чер. 79.

Доказ. Наложимъ $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ такъ, чтобы точка B' упала въ B и чтобы сторона $B'C'$ пошла по сторонѣ BC, тогда, по равенству этихъ сторонъ, точка C' упадетъ въ C и по равенству угловъ C и C', сторона $C'A'$ пойдетъ по сторонѣ CA; остается только доказать, что точка A' упадетъ въ A. Для доказательства этого опустимъ изъ точки B перпендикуляръ BG на AC и замѣтимъ, что точка A' не можетъ упасть между C и G, напр. въ точку G_1, потому что тогда сторона $B'A'$ должна была-бы принять положеніе BG_1, что невозможно, такъ какъ $BG_1 < BC$, (§ 38, теор. 3), а, по условію, $B'A'$ или равна или больше $B'C' = BC$. Точка A' не можетъ упасть между A и G, напр. въ G_2, потому что тогда было-бы BG_2 или $B'A' < AB$ (§ 38, теор. 3), а, по

условію, A′B′=AB. Наконецъ A′ не можетъ упасть далѣе A, напр. въ G_3, потому что тогда было-бы AB<A′B′. Слѣдов. A′ упадетъ въ A, и сторона A′B′ совпадетъ съ AB, треугольники совмѣстятся, а потому они равны.

Замѣчаніе. Если треугольники имѣютъ по двѣ равныя стороны и по равному углу, лежащему противъ меньшей стороны, то они не будутъ равны между собою только въ случаѣ, если одинъ изъ нихъ остроугольный, а другой тупоугольный, потому что если AB<BC (чер. 80), то ничто не препятствуетъ сторонѣ A′B′ принять положеніе BG_1, въ случаѣ если △ A′B′C′ тупоугольный.

Чер. 80.

Слѣдствіе. *Прямоугольные треугольники равны, если имѣютъ по равной гипотенузѣ и по равному катету.*

Задача 4. *Построить треугольникъ по двумъ даннымъ сторонамъ и по данному углу, который не лежитъ противъ меньшей стороны.*

Рѣш. На сторонѣ даннаго ∠ A (чер. 81) отложимъ меньшую изъ двухъ данныхъ сторонъ AC (или одну изъ двухъ въ случаѣ, если данныя стороны равны между собою) и потомъ радіусомъ, равнымъ большей сторонѣ, изъ точки C, какъ центра, опишемъ дугу, которая пересѣчетъ другую сторону угла A въ двухъ точкахъ M и N; соединяя M и C прямою, получимъ △ AMC, который и есть искомый.

Чер. 81.

Замѣчаніе. Если стороны MC и AC равны между собою, то дуга пройдетъ чрезъ точку A и искомый треугольникъ будетъ AM′C.

Задача 5. *Построить треугольникъ по двумъ даннымъ сторонамъ и по данному углу, лежащему противъ меньшей стороны.*

Рѣш. На сторонѣ даннаго угла A (чер. 82) отложимъ большую сторону AC и изъ точки C, какъ центра, радіусомъ, равнымъ меньшей сторонѣ, опишемъ дугу, которая пересѣчетъ другую сторону угла, въ двухъ точкахъ M и N. Соединяя эти двѣ точки съ точкою C прямыми, получимъ два треугольника △ AMC

Чер. 82.

и △ ANC, изъ которыхъ каждый удовлетворяетъ требованіямъ и слѣдов. задача имѣетъ два рѣшенія.

Задача 6. *Построить прямоугольный треугольникъ по данной гипотенузѣ и данному катету.*

Рѣш. Построимъ прямой уголъ и потомъ поступимъ, какъ въ задачѣ 4-й.

Теорема 4. *Треугольники равны, если имѣютъ по два порознь равныхъ угла и по равной соотвѣтственной сторонѣ.*

Равныя стороны могутъ прилежать къ обоимъ соотвѣтственно-равнымъ угламъ, или могутъ прилежать къ одному и противулежать другому изъ соотвѣтственно-равныхъ угловъ. Разсмотримъ каждый изъ этихъ двухъ случаевъ отдѣльно.

1-й случай. Пусть (чер 83) дано: ∠ A=∠ A′; ∠ B=∠ B′ и AB=A′B′. Требуется доказать, что △ ABC=△ A′B′C′.

Доказ. Наложимъ △ A′B′C′ на △ ABC такъ, чтобы точка A′ упала въ A и чтобы сторона A′B′ пошла по AB (притомъ, чтобы обѣ вершины C и C′ упали по одну сторону AB), тогда, по равенству этихъ сторонъ, точка B′ упадетъ въ B. Такъ какъ, по условію, ∠ A=∠ A′ и ∠ B=∠ B′, то сторона A′C′ пойдетъ по AC и B′C′ по BC, и такъ какъ двѣ прямыя AC и BC могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ (§ 12), то вершина C′ упадетъ въ C. Слѣдов. треугольники совмѣстятся, а потому они равны.

Чер. 83

2-й случай. Пусть дано: ∠ A=∠ A′; ∠ B=∠ B′ и AC=A′C′ (стороны противъ соотвѣтственно-равныхъ угловъ B и B′). Требуется доказать, что △ ABC=△ A′B′C′.

Доказ. Намъ извѣстно (§ 50), что сумма угловъ треугольника=$2d$, а потому (акс. 1):

$$\angle A+\angle B+\angle C=\angle A'+\angle B'+\angle C' \quad (1).$$

Но, по условію, ∠ A=∠ A′ и ∠ B=∠ B′, слѣдов. (акс. 2).

$$\angle A+\angle B=\angle A'+\angle B' \quad (2).$$

Вычитая (2) изъ (1), получимъ (аксіома 2) ∠ C=∠ C′. Если-же ∠ C=∠ C′ и притомъ, по условію, ∠ A=∠ A′, AC=A′C′, то треугольники имѣютъ по два равныхъ угла и по равной сторонѣ, прилежащей этимъ угламъ, слѣдов. по доказанному въ 1-мъ случаѣ они равны между собою.

Замѣчаніе. Два треугольника могутъ имѣть по равной сторонѣ и по два равныхъ угла и не быть равными, но тогда равныя стороны не лежатъ противъ соотвѣтственно равныхъ

угловъ. Такъ напр. прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (чер. 84) не равны между собою, хотя гипотенуза AC равна катету A_1C_1, $\angle A = \angle B_1$, и $\angle B = \angle A_1 = d$.

Чер. 84.

Слѣдствіе 1. *Треугольники равны, если стороны одного порознь параллельны (или порознь перпендикулярны) сторонамъ другаго и если одна сторона перваго треугольника равна параллельной ей (или перпендикулярной ей) сторонѣ втораго.*

Пусть дано: $AB \parallel A'B'$; $BC \parallel B'C'$; $AC \parallel A'C'$ и притомъ $AB = A'B'$; требуется доказать, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (чер. 83).

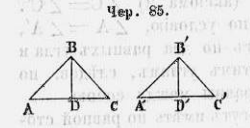
Доказ. Стороны каждой изъ трехъ паръ угловъ A и A'; B и B'; C и C' параллельны, а потому углы каждой пары или равны между собою или вмѣстѣ составляютъ $2d$, (§ 44, теор. 1). Но не можетъ быть двухъ паръ угловъ, составляющихъ по $2d$, потому что тогда сумма 4-хъ угловъ двухъ треугольниковъ равнялась-бы $4d$, а мы знаемъ, что сумма всѣхъ 6-ти угловъ обоихъ треугольниковъ $= 4d$. Значитъ, необходимо есть двѣ пары, въ которыхъ углы равны, слѣдов., по теоремѣ 4, $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Когда стороны перпендикулярны, доказательство тоже самое, только должно сослаться на теорему 2 § 44.

Слѣдствіе 2. *Прямоугольные треугольники равны, если имѣютъ по равному острому углу и по равному катету;* причемъ катетъ можетъ прилежать или противулежать острому углу.

Слѣдствіе 3. *Прямоугольные треугольники равны, если острый уголъ одного равенъ острому углу другаго и гипотенуза одного равна гипотенузѣ другаго.*

Слѣдствіе 4. *Въ равныхъ треугольникахъ высоты равны.* Такъ если $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (чер. 85), то высота $BD = B'D'$, потому что (слѣд. 3) прямоугольные треугольники BDC и B'D'C' равны между собою, такъ какъ $BC = B'C'$ и $\angle C = \angle C'$.

Чер. 85.



Задача 7. *Построить треугольникъ по двумъ даннымъ угламъ и прилежащей имъ сторонѣ.*

Рѣш. На произвольной прямой отложимъ данную сторону и при концахъ ея построимъ данные углы.

Задача 8. *Построить треугольникъ по двумъ даннымъ угламъ и сторонѣ, противулежащей одному изъ данныхъ угловъ.*

Рѣш. Построимъ уголъ, равный суммѣ двухъ данныхъ (§ 29, зад. 2); уголъ, смежный полученному, будетъ третій уголъ искомаго треугольника. Т. обр. задача сводится къ задачѣ 7-ой.

Задача 9. *Построить прямоугольный треугольникъ по данному острому углу и данному катету.* Рѣшеніе подобно задачѣ 7-й или зад. 8-й, смотря потому, прилежитъ данный катетъ данному острому углу или лежитъ противъ него.

Задача 10. *Построить прямоугольный треугольникъ по данному острому углу и данной гипотенузѣ.*

Рѣшеніе подобно задачѣ 8-й.

Задача 11. *Построить треугольникъ, стороны котораго были бы параллельны (или перпендикулярны) тремъ даннымъ прямымъ и одна изъ сторонъ котораго дана.*

Рѣш. Проведемъ прямую параллельную (или перпендикулярную) той изъ данныхъ прямыхъ, которая параллельна (или перпендикулярна) данной сторонѣ искомаго треугольника; отложимъ на этой прямой данную сторону и чрезъ концы послѣдней проведемъ прямыя, соотвѣтственно параллельныя (или перпендикулярныя) двумъ другимъ даннымъ прямымъ.

§ 54. Изъ всего сказаннаго о равенствѣ треугольниковъ слѣдуетъ, что треугольники равны, если три какія нибудь части одного, между которыми есть по крайней мѣрѣ одна сторона, равны тремъ соотвѣтственнымъ частямъ другаго. Исключеніе представляетъ только одинъ случай, а именно: когда два треугольника имѣютъ по двѣ равныя стороны и по равному углу противъ меньшей стороны и притомъ одинъ треугольникъ остроугольный, другой тупоугольный (§ 53, теор. 3, замѣчаніе). Но и въ этомъ случаѣ если оба треугольника одного рода, т. е. оба прямоугольные, или оба тупоугольные, или оба остроугольные, то они равны между собою. Вслѣдствіе этого всѣ условія равенства треугольниковъ можно выразить въ одномъ предложеніи:

Треугольники равны, если они одного рода и если три части одного, между которыми есть по крайней мѣрѣ одна сторона, равны тремъ соотвѣтственнымъ частямъ другаго.

§ 55. **Теорема 1**. *Если двѣ стороны одного треугольника порознь равны двумъ сторонамъ другаго, а углы между этими сторонами не равны, то противъ большаго угла лежитъ и сторона большая.*

Пусть (чер. 86) дано $AB=A'B'$; $BC=B'C'$ и $\angle B>\angle B'$. Требуется доказать, что $AC>A'C'$.

Чер. 86.

Доказ. Наложимъ $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ такъ, чтобы ихъ основанія $B'C'$ и BC совмѣстились, т. е. чтобы B' упало въ B и C' въ C. Такъ какъ $\angle B>\angle B'$, то сторона $B'A'$ приметъ нѣкоторое направленіе BE и $\triangle A'B'C'$ приметъ положеніе $\triangle BEC$. Соединимъ A и E прямою AE и изъ точки E, средины AE, возставимъ перпендикуляръ къ AE, который пройдетъ чрезъ точку B, потому что $BA=BE$ (§ 35, слѣд.). Точка C ближе къ концу E, чѣмъ къ A (§ 35, теор. 3), т. е. $AC>CE$ или $AC>A'C'$, что и требовалось доказать.

Теорема 2, *обр. Если двѣ стороны одного треугольника порознь равны двумъ сторонамъ другаго, а третьи стороны неравны, то противъ большей стороны лежитъ и уголъ большій.*

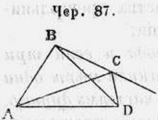
Пусть дано: $AB=A'B'$; $BC=B'C'$ и $AC>A'C'$. Требуется доказать, что $\angle B>\angle B'$.

Доказ. Уголъ B не можетъ быть равенъ углу B', потому что тогда $\triangle A'B'C'=\triangle ABC$ (§ 53, теор. 2) и было бы $AC=A'C'$, а намъ дано $AC>A'C'$. Уголъ B не можетъ быть меньше $\angle B'$, потому что тогда было-бы (теор. 1) и $AC<A'C'$, а намъ дано $AC>A'C'$. Слѣдов. (акс. 9) $\angle B>\angle B'$.

Четыреугольники.

§ 56. *Четыреугольникомъ* называется опредѣленная часть плоскости, которая ограничена замкнутой ломаной линіей, составленной изъ четырехъ прямыхъ. *Діагональю* (*διά*—чрезъ, *γωνία*—уголъ) четыреугольника называется разстояніе между вершинами угловъ, не имѣющихъ общихъ сторонъ. Такъ (чер. 87) $ABCD$ есть четыреугольникъ; AC и BD — діагонали его. Уголъ, составленный двумя послѣдовательными сторонами четыреугольника, напр. $\angle ABC$, называется *внутреннимъ угломъ*. Уголъ, составленный одной стороной и продолженіемъ другой, проходящей чрезъ ту же вершину, напр. $\angle DCI$, называется *внѣшнимъ*. Когда внутренній уголъ четыреугольника болѣе $2d$, какъ напр. $\angle BAD$ четыреугольника $ABCD$

Чер. 87.



(чер. 88), то онъ называется *входящимъ* угломъ. Внѣшнимъ угломъ, ему соотвѣтствующимъ, должно считать $\angle BAV$.

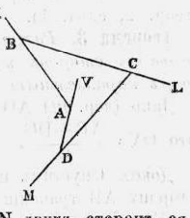
Чер. 88.

Теорема 1. *Сумма всѣхъ внутреннихъ угловъ четыреугольника равняется четыремъ прямымъ угламъ.*

Доказ. Проведемъ діагональ AC (чер. 87), которая раздѣлитъ четыреугольникъ на два треугольника. Сумма угловъ каждаго треугольника $=2d$ (§ 50). Слѣд. сумма угловъ четыреугольника $=4d$, т. е. $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4d$.

Теорема 2. *Если въ четыреугольникѣ нѣтъ входящаго угла, и если при каждой вершинѣ четыреугольника построимъ по одному внѣшнему углу, то сумма всѣхъ этихъ четырехъ внѣшнихъ угловъ равняется четыремъ прямымъ угламъ.* Данъ четыреугольникъ $ABCD$ (чер. 89), и требуется доказать, что сумма угловъ: $a'+b'+c'+l'=4d$.

Чер. 89.



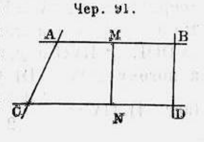
Доказ. $a+a'=2d$; $b+b'=2d$; $c+c'=2d$ и $l+l'=2d$. Поэтому:
$a+a'+b+b'+c+c'+l+l'=8d$ (акс. 2), но, по теор. 1-й, $a+b+c+l=4d$; слѣдов. $a'+b'+c'+l'=4d$.

Замѣчаніе. Если въ четыреугольникѣ есть входящій уголъ, то сумма внѣшнихъ угловъ, безъ внѣшняго угла, соотвѣтствующаго входящему, равна $4d$. Такъ въ четыреугольникѣ $ABCD$ (чер. 90) $\angle KBC+\angle LCD+\angle MDA-\angle BAV=4d$, потому что внутренній $\angle A$ безъ $\angle BAV=2d$.

Чер. 90.

§ 57. Если двѣ параллельныя прямыя AB и CD (чер. 91) пересѣчемъ двумя непараллельными AC и BD, то получимъ четыреугольникъ $ABCD$, который называется *трапеціей* (*τραπέζιον*). Слѣдов. *трапеціей называется четыреугольникъ, въ которомъ двѣ стороны параллельны между собой, а двѣ другія непараллельны. Высотою* трапеціи называется разстояніе MN двухъ сторонъ ея.

Чер. 91.

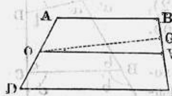


Теорема 1. *Прямая, соединяющая средины двухъ непараллельныхъ и противуположныхъ сторонъ трапеціи, параллельна другимъ двумъ сторонамъ ея.* Дано (чер. 92) $AO=OD$ и $BV=VC$; требуется доказать, что $OV \parallel AB \parallel DC$.

Доказ. Опустимъ изъ точекъ O и V перпендикуляры OE и VG на прямую AB и продолжимъ ихъ до встрѣчи съ прямою DC, тогда EI и GK будутъ перпендикуляры и къ DC, потому что по условію $AB \parallel DC$ (§ 43, теор. 2). $\triangle AOE = \triangle DOI$ (§ 53, теор. 4, слѣд. 3), такъ какъ гипотенузы AO и DO равны и $\angle EOA = \angle DOI$, какъ вертикальные (§ 33, теор. 1); слѣдов. $OE = OI$. Такимъ же образомъ докажемъ, что $VG = VK$. Но такъ какъ $AB \parallel DC$, то $EI = GK$ (§ 43, теор. 10), или $2EO = 2GV$ и $EO = GV$. Если же $EO = GV$, то $AB \parallel OV$ (§ 43, теор. 9), а потому и $OV \parallel DC$ (§ 43, теор. 2).

Чер. 92.

Теорема 2, *обр. Прямая, проходящая чрезъ средину одной изъ непараллельныхъ сторонъ трапеціи и параллельная двумъ параллельнымъ сторонамъ ея, пройдетъ чрезъ средину другой непараллельной стороны трапеціи.*


Чер. 93.

Дано (чер. 93) $AO = DO$ и $OV \parallel AB$. Требуется доказать, что $BV = CV$.

Доказ. Если предположимъ, что точка V не есть средина BC и что точка G есть средина ея, то, соединяя G съ срединою O прямой AD, получимъ прямую OG, которая по теор. 1 будетъ параллельна AB. Такимъ образомъ чрезъ точку O будутъ проходить двѣ прямыя OV и OG, параллельныя AB, что невозможно (§ 43, теор. 2, слѣд. 1).

Теорема 3. *Разстояніе между срединами двухъ непараллельныхъ сторонъ трапеціи равняется половинѣ суммы двухъ параллельныхъ сторонъ ея.*

Дано (чер. 92) $AO = DO$ и $BV = CV$. Требуется доказать, что $OV = \frac{AB + DC}{2}$.

Доказ. Опустимъ перпендикуляры изъ точекъ O и V на сторону AB трапеціи и продолжимъ ихъ до встрѣчи съ DC, то $EI \parallel GK$ (§ 43, теор. 1), и слѣд. $EG = OV = IK$ (§ 43, теор. 10); или $2OV = EG + IK$; или $2OV = EA + AB + BG + IK$. Но изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ $\triangle AOE$ и $\triangle DOI$, $\triangle BVG$ и $\triangle KVC$ слѣдуетъ, что $EA = DI$ и $BG = KC$, а потому $2OV = DI + AB + KC + IK = AB + DC$ и, значитъ, (акс. 4) $OV = \frac{AB + DC}{2}$.

§ 58. Если двѣ параллельныя прямыя пересѣчемъ двумя другими параллельными, то получимъ четыреугольникъ, который называется *параллелограммомъ* (παραλληλόγραμμον, отъ παράλληλος—параллельный и γράμμη—линія). Слѣдов. *параллелограммомъ называется четыреугольникъ, у котораго противуположныя стороны параллельны.* Одну изъ сторонъ параллелограмма принимаютъ за *основаніе*. Разстояніе основанія отъ параллельной ему стороны называется *высотою* параллелограмма.

Теорема 1. *Въ параллелограммѣ противуположныя стороны равны.* Данъ параллелограммъ ABCD (чер. 94) и требуется доказать, что $BC = AD$ и $AB = DC$.

Чер. 94.

Доказ. Если проведемъ діагональ AC, то $\triangle ABC = \triangle CAD$ (§ 53, теор. 4), потому что сторона AC общая, $\angle BAC = \angle ACD$, такъ какъ $AB \parallel DC$, и $\angle BCA = \angle CAD$, такъ какъ $BC \parallel AD$ (§ 43, теор. 4). Слѣдов. соотвѣтственныя стороны этихъ треугольниковъ тоже равны, т. е. $BC = AD$ и $AB = DC$.

Теорема 2. *Если противуположныя стороны четыреугольника равны, то четыреугольникъ есть параллелограммъ.* Дано $AB = DC$ и $BC = AD$. Требуется доказать, что $AB \parallel DC$ и $BC \parallel AD$.

Доказ. $\triangle ABC = \triangle CAD$, потому что $AB = DC$; $BC = AD$ и AC общая сторона (§ 53, теор. 1). Слѣдов. $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle CAD$, и, значитъ, $AB \parallel DC$ и $BC \parallel AD$ (§ 43, теор. 3).

Теорема 3. *Если двѣ противуположныя стороны четыреугольника равны и параллельны, то четыреугольникъ есть параллелограммъ.*

Дано $BC = AD$ и $BC \parallel AD$. Требуется доказать, что $AB \parallel CD$.

Доказ. $\triangle ABC = \triangle CAD$ (§ 53, теор. 2). Слѣдов. $\angle BAC = \angle ACD$, а потому $AB \parallel DC$ (§ 43, теор. 3).

Теорема 4. *Діагональ дѣлитъ параллелограммъ на два равныхъ треугольника.*

Въ самомъ дѣлѣ $\triangle ABC = \triangle CAD$, потому что сторона AC общая; $\angle BAC = \angle ACD$, такъ какъ по условію $AB \parallel CD$, и $\angle BCA = \angle DAC$, такъ какъ $BC \parallel AD$ (§ 53, теор. 4).

Теорема 5. *Діагонали параллелограмма дѣлятся другъ другомъ пополамъ.*

Дано (чер. 95) $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$; требуется доказать, что $AO = OC$ и $BO = OD$.

Чер. 95.

Доказ. $\triangle AOB = \triangle COD$ (§ 53, теор. 4), потому что $AB = DC$ (теор. 1); $\angle BAC = \angle DCA$ и $\angle ABD = \angle CDB$, какъ накрестъ лежащіе (§ 43, теор. 4). Слѣдов. $AO = OC$ и $BO = OD$.

§ 59. *Параллелограммъ, въ которомъ всѣ стороны равны, называется ромбомъ* (ῥόμβος). Такъ (чер. 96) ABCD есть ромбъ.

Чер. 96

Теорема. *Въ ромбѣ діагонали перпендикулярны другъ къ другу.*

Дано $AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$; $AB = CD = AD = BC$. Требуется доказать, что $AC \perp BD$.

Доказ. $\triangle BOC = \triangle DOC$ (§ 53, теор. 1), потому что сторона CO общая; $BO = DO$ (§ 58, теор. 5) и $BC = DC$ по условію. Слѣдов. $\angle BOC = \angle DOC = d$.

Слѣдствіе. Изъ равенства тѣхъ-же треугольниковъ слѣдуетъ, что *діагональ дѣлитъ каждый уголъ ромба пополамъ*, т. е. $\angle BCO = \angle DCO$.

§ 60. Если двѣ параллельныя прямыя пересѣчемъ двумя другими перпендикулярными къ первымъ и слѣдов. параллельными между собою (§ 43, теор. 1), то получимъ параллелограммъ, который называется *прямоугольникомъ*. Всѣ углы этого параллелограмма будутъ прямые и слѣдов. можно сказать, что *прямоугольникъ есть параллелограммъ, въ которомъ всѣ углы прямые.*

Теорема. *Въ прямоугольникѣ діагонали равны между собою*, т. е. въ прямоугольникѣ ABCD (чер. 97) $AC = BD$, потому что $\triangle ADC = \triangle BDC$, такъ какъ сторона DC общая; $AD = BC$ и $\angle ADC = \angle BCD$, какъ прямые (§ 53, теор. 2, слѣд.).

Чер. 97.

§ 61. Прямоугольникъ, въ которомъ стороны равны, называется *квадратомъ* (quadrare—дѣлать квадратъ). Напр. (чер. 98) ABCD есть квадратъ. Можно тоже назвать квадратомъ ромбъ, у котораго всѣ углы прямые. *Въ квадратѣ діагонали равны* (§ 60), *перпендикулярны другъ къ другу и дѣлятъ углы при вершинахъ пополамъ* (§ 59).

Чер. 98.

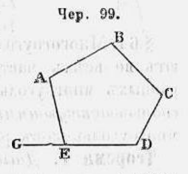
Многоугольники.

§ 62. Опредѣленная часть плоскости, которая ограничена ломаной линіей, составленной изъ 5-ти, 6-ти и т. д., вообще изъ n прямыхъ линій, называется пятиугольникомъ, шестиугольникомъ и т. д. n—угольникомъ. Слѣдов. *многоугольникомъ называется опредѣленная часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линіей.*

Разстояніе между вершинами двухъ угловъ многоугольника, не прилежащихъ къ одной сторонѣ, называется *діагональю* многоугольника. Во всякомъ многоугольникѣ столько сторонъ, сколько угловъ. *Изъ вершины угла многоугольника можно провести столько діагоналей, сколько сторонъ безъ трехъ, и этими діагоналями многоугольникъ раздѣляется на столько треугольниковъ, сколько сторонъ безъ двухъ.* Потому что изъ вершины всякаго угла можно провести по одной діагонали въ вершину каждаго изъ остальныхъ угловъ, за исключеніемъ того угла, изъ вершины котораго діагонали проводятся, и двухъ угловъ, имѣющихъ по одной сторонѣ, общей со сказаннымъ угломъ. Въ каждый изъ треугольниковъ, образуемыхъ этими діагоналями, войдетъ по одной сторонѣ многоугольника, за исключеніемъ двухъ крайнихъ треугольниковъ, въ которые войдетъ по двѣ стороны многоугольника.

§ 63. Уголъ, составленный двумя послѣдовательными сторонами многоугольника, напр. (чер. 99) $\angle ABC$, называется *внутреннимъ угломъ* многоугольника или, просто, угломъ многоугольника. Уголъ, составленный одной стороной и продолженіемъ другой, проходящей чрезъ ту же вершину; напр. $\angle AEG$, называется *внѣшнимъ*. Когда внутренній уголъ болѣе $2d$, какъ напр. (чер. 100) $\angle ABC$, то онъ называется *входящимъ* угломъ. Внѣшній уголъ, соотвѣтствующій входя-щему, есть $\angle ABV$.

Чер. 99.



Теорема 1. *Сумма угловъ всякаго многоугольника равняется $2d$, повторенным столько разъ, сколько многоугольникъ имѣетъ сторонъ безъ двухъ.*

Данъ многоугольникъ, у котораго n сторонъ и требуется доказать, что сумма его угловъ $= 2d\,(n-2) = 2dn - 4d$.

Доказ. Если изъ вершины одного угла многоугольника проведемъ діагонали въ многоугольникѣ, то многоугольникъ раздѣлится на треугольники, число которыхъ равно $n-2$ (какъ было сказано въ § 62). Сумма угловъ всѣхъ этихъ треугольниковъ равна суммѣ угловъ даннаго многоугольника; но сумма угловъ одного треугольника $= 2d$, то, значитъ, сумма угловъ даннаго многоугольника $= 2d\ (n-2)$ или $2dn-4d$, что и требовалось доказать.

Чер. 100.

Теорема 2. *Если въ многоугольникѣ нѣтъ входящаго угла, и если при каждой вершинѣ многоугольника построимъ по одному внѣшнему углу, то сумма всѣхъ этихъ внѣшнихъ угловъ равняется 4d.*

Доказ. Каждый внутренній уголъ многоугольника вмѣстѣ съ соотвѣтствующимъ ему внѣшнимъ угломъ составляетъ $2d$, какъ смежные (§ 32, теор. 2). Слѣдов. сумма всѣхъ внутреннихъ угловъ съ соотвѣтствующими имъ внѣшними въ n—угольникѣ равняется $2dn$. Вычитая изъ этой суммы сумму внутреннихъ угловъ, т. е. $2dn-4d$, получимъ сумму всѣхъ внѣшнихъ угловъ, которая будетъ $2dn-(2dn-4d)=4d$, что и требовалось доказать.

Чер. 101.

Замѣчаніе. Если въ многоугольникѣ есть входящіе углы, то сумма внѣшнихъ угловъ безъ угловъ внѣшнихъ, соотвѣтствующихъ входящимъ, равна $4d$. Такъ въ шестиугольникѣ съ однимъ входящимъ угломъ (чер. 101) $a+b+c+l+e-k=4d$, потому что входящій уголъ безъ угла, соотвѣтствующаго внѣшнему, $=2d$.

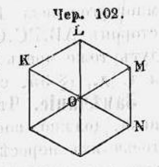
§ 64. Многоугольники называются *равными*, если совпадаютъ во всѣхъ частяхъ при наложеніи другъ на друга. Въ равныхъ многоугольникахъ части совмѣщающіяся называются *соотвѣтствующими*. Соотвѣтственныя діагонали равныхъ многоугольниковъ равны.

Теорема 1. *Діагонали, проведенныя изъ соотвѣтственныхъ угловъ равныхъ многоугольниковъ, раздѣляютъ ихъ на одинаковое число равныхъ и соотвѣтственно расположенныхъ треугольниковъ.* Потому что многоугольники, какъ равные, совмѣстятся, причемъ совмѣстятся и треугольники, и слѣдовательно послѣдніе равны между собою.

Теорема 2. *Если два многоугольника діагоналями раздѣляются на одинаковое число равныхъ и соотвѣтственно расположенныхъ треугольниковъ, то многоугольники равны между собою,* потому что они совмѣстятся при наложеніи другъ на друга.

§ 65. Если возьмемъ уголъ, равный $\frac{4d}{n}$, гдѣ n какое нибудь цѣлое число, и будемъ его откладывать при точкѣ O (чер. 102), то n такихъ угловъ составятъ $4d$.

Чер. 102.



Если отъ точки O отложимъ по направленію всѣхъ полученныхъ прямыхъ равныя части OK=OL=OM=.... и соединимъ всѣ точки K,L,M,N..... прямыми KL, LM, MN...., то получимъ многоугольникъ, у котораго всѣ углы равны и всѣ стороны равны, такъ какъ △OKL=△OLM=△OMN=........ (имѣютъ по равному углу между двумя равными сторонами); такой многоугольникъ называется правильнымъ. Слѣдовательно *правильнымъ многоугольникомъ называется такой, у котораго всѣ углы и всѣ стороны равны между собою.*

Напр. равносторонній треугольникъ и квадратъ суть правильные многоугольники. Всякій уголъ правильнаго n—угольника равняется $\frac{2d(n-2)}{n}$.

Теорема 1. *Перпендикуляры, возставленные изъ срединъ сторонъ правильнаго многоугольника, и равнодѣлящія угловъ его сходятся въ одной общей точкѣ, называемой центромъ правильнаго многоугольника.*

Доказ. Раздѣлимъ два угла, напр. ∠A и ∠B, правильнаго многоугольника пополамъ (чер. 103). Равнодѣлящія этихъ угловъ пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ O.

Чер. 103.

Соединяя эту точку съ вершинами всѣхъ угловъ многоугольника, получимъ треугольники OBC, OCD, ODE, и т. д., которые всѣ равны между собою. Дѣйствительно, въ △OBA $\angle OBA = \frac{\angle B}{2}$ и $\angle OAB = \frac{\angle A}{2}$, а такъ какъ ∠B=∠A, то и ∠OBA=∠OAB (акс. 4) и, значитъ, △OBA равнобедренный, т. е. OB=OA (§ 52, теор. 2). Притомъ △OBA=△OBC, такъ какъ сторона OB общая, BA=BC, какъ стороны правильнаго мно-

гоугольника, и $\angle OBC = \frac{\angle B}{2} = \angle OBA$; слѣд. $\triangle OBC$ равнобедренный, а потому сторона $OC = OB$ и $\angle OCB = \angle OBC = \frac{\angle C}{2}$. Такимъ же образомъ докажемъ, что $\triangle OBC = \triangle OCD = \triangle ODE$ и т. д. послѣдовательно. Итакъ, прямыя OC, OD, OE и т. д. суть равнодѣлящія угловъ C, D, E и т. д.; всѣ онѣ сходятся въ одной точкѣ O, которая и есть центръ многоугольника. Перпендикуляры, возставленные изъ срединъ сторонъ AB, BC, CD и т. д., т. е. PO, QO, KO и т. д., пройдутъ тоже чрезъ точку O, потому что $OA = OB = OC = OD$ и т. д., (§ 35, слѣд.).

Замѣчаніе. Чтобы найти центръ правильнаго многоугольника, должно построить равнодѣлящія двухъ угловъ его и точка ихъ пересѣченія будетъ искомая. Или, должно возставить перпендикуляры изъ средины двухъ сторонъ до взаимнаго пересѣченія ихъ въ искомой точкѣ.

Разстояніе центра отъ стороны, т. е. длина OP, OQ и т. д., называется *апоѳемою* правильнаго многоугольника. Всѣ апоѳемы правильнаго многоугольника равны между собою, потому что въ равныхъ треугольникахъ высоты равны (§ 53, теор. 4, слѣд. 4).

Теорема 2. *Два правильные многоугольника одинакаго числа сторонъ равны между собою, если сторона одного равна сторонѣ другаго*, потому что всѣ стороны ихъ и всѣ углы будутъ равны, и, значитъ, многоугольники совмѣстятся при наложеніи.

ОТДѢЛЪ III.

Взаимное положеніе прямыхъ и окружности.

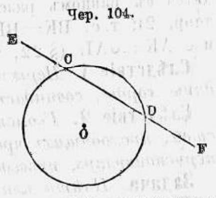
Хорды и касательныя.

§ 66. **Теорема.** *Прямая можетъ пересѣкать окружность не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ.*

Доказ. Если бы прямая имѣла три точки на окружности, то разстоянія этихъ трехъ точекъ отъ центра были бы равны между собою, какъ радіусы окружностей, чего быть не можетъ, потому что изъ центра нельзя провести къ прямой трехъ равныхъ наклонныхъ (§ 38, теор. 2 слѣд.).

§ 67. Если возьмемъ на окружности двѣ какія нибудь точки C и D (чер. 104) и проведемъ чрезъ нихъ прямую EF, то такая прямая называется сѣкущей. Слѣдов. *сѣкущей* называется прямая, пересѣкающая окружность въ двухъ точкахъ. Часть сѣкущей, лежащая внутри окружности, есть хорда (§ 21). Хорда, не проходящая черезъ центръ, дѣлитъ окружность на двѣ неравныя дуги, и мы будемъ всегда подъ словами: „дуга, стягиваемая хордою“ разумѣть меньшую изъ двухъ дугъ.

Чер. 104.



Теорема 1. *Въ той же, или въ двухъ равныхъ окружностяхъ, большая дуга стягивается большею хордою.*

Пусть дано: $\smile AB > \smile A'B'$ (чер. 105); требуется доказать, что $AB > A'B'$.

Доказ. Отложимъ на большей дугѣ отъ точки A дугу AC равную $\smile A'B'$; проведемъ хорду AC и концы двухъ хордъ AB и AC соединимъ прямыми съ центромъ O. Въ треугольникахъ AOC и AOB стороны $OA = OC = OB$, какъ радіусы, и $\angle AOB > \angle AOC$ (акс. 8), а потому $AB > AC$ (§ 55, теор. 1). Но $\smile AC = \smile A'B'$, значитъ, и хорда $AC = A'B'$ (§ 22, теор. 1). Слѣдов. $AB > A'B'$ (акс. 7), что и требовалось доказать.

Чер. 105.

Теорема 2, *обр. Большая хорда стягиваетъ большую дугу.*

Дано $AB > A'B'$; требуется доказать, что $\smile AB > \smile A'B'$.

Доказ. $\smile AB$ не можетъ быть равна $\smile A'B'$, потому что тогда было бы и $AB = A'B'$ (§ 22, теор. I); $\smile AB$ не можетъ быть меньше $\smile A'B'$, потому что тогда была бы и хорда $AB < A'B'$ (теор. 1). Слѣдов. $\smile AB > \smile A'B'$ (акс. 9).

§ 68. **Теорема.** *Діаметръ, перпендикулярный къ хордѣ, дѣлитъ хорду и обѣ дуги, которыя она стягиваетъ пополамъ.*

Чер. 106.

Пусть дано: діаметръ $AB \perp KL$ (черт. 106) и требуется доказать, что $KI = LI$; $\smile BK = \smile BL$ и $\smile AK = \smile AL$.

Доказ. Наклонныя OK и OL равны, какъ радіусы, и слѣдов. $KI = LI$ (§ 35, слѣд.). Если же точка I есть средина KL, то всѣ точки

перпендикуляра AB, проведеннаго чрезъ средину KL, находятся въ равномъ разстояніи отъ концовъ хорды KL (§ 35, теор. 2); т. е. BK=BL и KA=AL, а потому ◡BK=◡BL и ◡AK=◡AL (§ 22, теор. 2), что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1. *Перпендикуляръ, возстановленный изъ средины хорды, совпадаетъ съ діаметромъ окружности.*

Слѣдствіе 2. *Геометрическое мѣсто центровъ окружностей, проходящихъ чрезъ двѣ данныя точки A и B, есть перпендикуляръ, проведенный чрезъ средину AB.*

Задача. *Найти центръ дуги или окружности.*

Рѣш. Изъ средины двухъ хордъ возставить перпендикуляры, точка пересѣченія которыхъ есть центръ дуги или окружности.

§ 69. **Теорема 1**. *Въ той же, или въ двухъ равныхъ окружностяхъ, равныя хорды равно удалены отъ центра.*

Дано (чер. 107) AB=CD; требуется доказать, что перпендикуляры, опущенные изъ центра O на эти хорды, равны, т. е., что OK=OL.

Чер. 107.

Доказ. Прямоугольные треугольники AOK и COL равны (§ 53, теор. 3, слѣд.), такъ какъ они имѣютъ по равной гипотенузѣ AO=CO и по равному катету AK=CL, какъ половины равныхъ хордъ (акс. 4), потому что по § 68 точки K и L суть средины ихъ. Слѣдов. треьи стороны этихъ равныхъ треугольниковъ тоже равны, т. е. OK=OL.

Теорема 2, *об. Хорды, равноудаленныя отъ центра, равны.*

Дано OK=OL; требуется доказать, что AB=CD.

Доказ. △AOK=△COL, потому что AO=CO и OK=OL (§ 53, теор. 3 слѣд.). Слѣдов. AK=CL и 2AK=2CL (акс. 4). Но какъ по теоремѣ § 68 точки K и L суть средины хордъ, то AB=CD.

Теорема 3. *Въ той же, или въ двухъ равныхъ окружностяхъ, большая хорда ближе къ центру, чѣмъ меньшая.*

Дано (чер. 108) AB>CD и требуется доказать, что длина перпендикуляра OK<OL.

Чер. 108.

Доказ. ◡AB>◡CD, потому что AB>CD (§ 67, теор. 2). Отложимъ на дугѣ AB отъ A дугу AV, равную CD, проведемъ хорду AV и опустимъ на нея перпендикуляръ OI, тогда OK<OG, такъ какъ OK перпендикуляръ и OG наклонная къ хордѣ AB (§ 37). Но OG<OI (акс. 8),

а потому и OK<OI. Притомъ AV=CD, такъ какъ ◡AV=◡CD (§ 22, теор. 1), и по теоремѣ 1-й OI=OL; слѣдов. (акс. 7) OK<OL.

Теорема 4, *обр. Хорда, которая ближе къ центру, больше хорды, которая далѣе отъ центра.*

Дано OK<OL; требуется доказать, что AB>CD.

Доказ. AB не можетъ быть равно CD, потому что тогда было бы и OK=OL (теор. 1). AB не можетъ быть меньше CD, потому что тогда было бы OK > OL (тер. 3). Слѣдов. AB>CD (акс. 9).

§ 70. Представимъ себѣ, что сѣкущая EF (чер. 109) вращается около одной неподвижной точки пересѣченія A, причемъ другая точка пересѣченія B приближается къ A и сѣкущая принимаетъ послѣдовательно положенія E_1F_1, E_2F_2 и т. д. Когда обѣ точки пересѣченія сольются въ одну, сѣкущая будетъ имѣть только одну общую точку A съ окружностью. Такую сѣкущую называютъ касательною. Такимъ образомъ *касательною* прямою къ окружности называется прямая, имѣющая только одну общую точку съ окружностью. Эта общая точка называется *точкою касанія*.

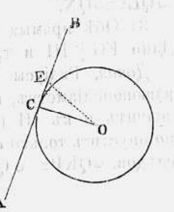
Чер. 109.

Замѣчаніе. Касательною можно тоже назвать такую сѣкущую, у которой обѣ точки пересѣченія сливаются въ одну точку.

Теорема 1. *Всякая прямая, перпендикулярная къ радіусу и проходящая чрезъ точку пересѣченія радіуса съ окружностью, есть касательная къ окружности.*

Пусть дано AB⊥CO (чер. 110) и требуется доказать, что AB есть касательная, т. е. что AB имѣетъ только одну точку C общую съ окружностью.

Чер. 110.



Доказ. Соединивъ какую нибудь точку прямой AB (кромѣ точки C), напр. точку E, съ центромъ, замѣтимъ, что OE, какъ наклонная, больше перпендикуляра OC (§37), т. е. больше радіуса, а потому всѣ точки прямой AB (кромѣ C) лежатъ внѣ окружности. Слѣ-

дов. AB имѣетъ только одну общую точку C съ окружностью, т. е. AB есть касательная.

Теорема 2, *обр. Касательная перпендикулярна къ радіусу, проведенному въ точку касанія.*

Пусть AB касается въ точкѣ C съ окружностью и требуется доказать, что $OC \perp AB$.

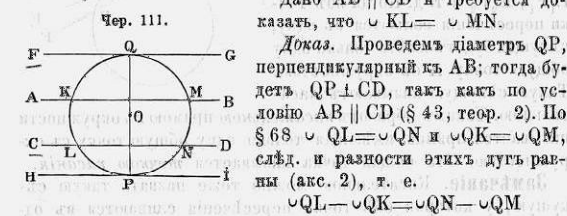
Доказ. Всякая точка, напр. E, прямой AB (кромѣ точки C) лежитъ внѣ окружности, а потому $OE > OC$ и слѣдов. OC есть кратчайшее разстояніе точки O отъ прямой AB, т. е. OC есть перпендикуляръ къ AB (§ 37).

Слѣдствіе 1. *Чрезъ точку окружности можно провести только одну касательную къ окружности* (§ 35, теор. 1).

§ 71. **Теорема.** *Дуги окружности, заключенныя между параллельными прямыми, равны.*

Тутъ можетъ быть три случая:

1) Обѣ прямыя AB и CD (чер. 111) сѣкущія.



Чер. 111.

Дано $AB \parallel CD$ и требуется доказать, что $\smile KL = \smile MN$.

Доказ. Проведемъ діаметръ QP, перпендикулярный къ AB; тогда будетъ $QP \perp CD$, такъ какъ по условію $AB \parallel CD$ (§ 43, теор. 2). По § 68 $\smile QL = \smile QN$ и $\smile QK = \smile QM$, слѣд. и разности этихъ дугъ равны (акс. 2), т. е.

$$\smile QL - \smile QK = \smile QN - \smile QM$$

или $\smile KL = \smile MN$.

2) Одна прямая FG, касательная въ точкѣ Q, другая CD сѣкущая.

Дано $FG \parallel CD$; требуется доказать, что $\smile QL = \smile QN$.

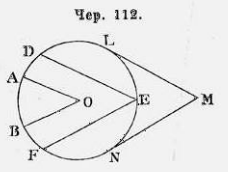
Доказ. Касательная $FG \perp QP$ (§ 70, теор. 2), слѣдов. $QP \perp CD$, такъ какъ по условію $FG \parallel CD$; значитъ по § 68 $\smile QL = \smile QN$.

3) Обѣ прямыя FG и HI касательныя въ точкахъ Q и P. Дано $FG \parallel HI$ и требуется доказать, что $\smile QKP = \smile QMP$.

Доказ. Радіусы OQ и OP лежатъ въ одной прямой, составляющей діаметръ, потому что радіусъ $OQ \perp FG$ (§ 70, теор. 2), значитъ и къ HI (§ 43, теор. 2), притомъ изъ точки O можно опустить только одинъ перпендикуляръ на прямую HI (§ 36); слѣдов. $\smile QKP = \smile QMP$, какъ полуокружности.

Вписанные и описанные углы.

§ 72. Уголъ AOB (чер. 112), вершина котораго въ центрѣ окружности, называется *центральнымъ угломъ*. Уголъ DEF, вершина котораго находится на окружности, называется *вписаннымъ угломъ*; а уголъ LMN, стороны котораго касаются окружности—*описаннымъ угломъ*.



Чер. 112.

Теорема 1. *Вписанный уголъ равенъ половинѣ центральнаго угла, опирающагося на ту же дугу.*

Разсмотримъ три случая отдѣльно:

1-й случай. Положимъ, что вписанный уголъ ABC (чер. 113) составленъ изъ діаметра BC и хорды AB, и докажемъ, что $\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$.

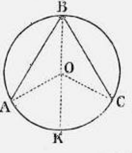
Чер. 113.

Доказ. Въ $\triangle AOB$ внѣшній уголъ AOC равенъ суммѣ двухъ несмежныхъ внутреннихъ угловъ (§ 48), т. е. $\angle AOC = \angle ABC + \angle BAO$. Но $\triangle AOB$ равнобедренный, такъ какъ $AO = BO$, какъ радіусы, и слѣдов. $\angle ABC = \angle BAO$ (§ 52, теор. 1), а потому $\angle AOC = 2 \angle ABC$; откуда

$$\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}.$$

2-й случай. Положимъ, что вписанный уголъ ABC (чер. 114) составленъ изъ двухъ хордъ AB и BC, между которыми лежитъ центръ, и докажемъ, что

$$\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}.$$



Чер. 114.

Доказ. Проведя діаметръ BK, находимъ по 1-му случаю:

$$\angle ABK = \frac{\angle AOK}{2} \text{ и } \angle KBC = \frac{\angle KOC}{2};$$

складывая, получимъ

$$\angle ABK + \angle KBC = \frac{\angle AOK + \angle KOC}{2} \text{ или } \angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}.$$

3-й случай. Положимъ, что вписанный уголъ ABC (чер. 115) состоитъ изъ двухъ хордъ AB и BC, лежащихъ по одну сторону центра, и докажемъ, что $\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$.

Чер. 115.

Доказ. Проведя діаметръ BK, находимъ по 1-му случаю:

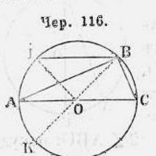
$$\angle ABK = \frac{\angle AOK}{2} \text{ и } \angle CBK = \frac{\angle COK}{2};$$

вычитая изъ перваго равенства второе, получимъ:

$$\angle ABK - \angle CBK = \frac{\angle AOK - \angle COK}{2}, \text{ или } \angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}.$$

Слѣдствіе 1. *Всѣ вписанные углы, опирающіеся на одну и ту же дугу, равны между собою.*

Слѣдствіе 2. *Уголъ, вписанный въ полуокружность и опирающійся на діаметръ, есть прямой уголъ.* Потому что, проведя чрезъ вершину B угла ABC (чер. 116) діаметръ BK, имѣемъ:



Чер. 116.

$$\angle ABK = \frac{\angle AOK}{2} \text{ и } \angle KBC = \frac{\angle KOC}{2};$$

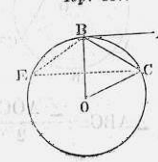
складывая и замѣчая, что $\angle AOK + \angle KOC = 2d$ (§ 32, теор. 2), имѣемъ:

$$\angle ABK + \angle KBC = \frac{\angle AOK + \angle KOC}{2} = d,$$

т. е. уголъ B прямой.

Замѣчаніе. Если вписанный уголъ болѣе прямаго, то соотвѣтствующій ему центральный уголъ болѣе двухъ прямыхъ. Напр. углу IBC соотвѣтствуетъ центральный уголъ, опирающійся на дугу IKC, т. е. уголъ: $4d - \angle IOC$.

Теорема 2. *Уголъ, составленный хордою и касательной, проведенной чрезъ конецъ хорды, равенъ половинѣ центральнаго угла, который опирается на дугу, стягиваемую хордою* (чер. 117).



Чер. 117.

Пусть данъ $\angle ABC$, составленный хордою BC и касательной BA; требуется доказать, что $\angle ABC = \frac{\angle BOC}{2}$.

Доказ. Чрезъ точку C проведемъ хорду CE ∥ AB, и соединимъ прямою EB

точки E и B, то получимъ $\triangle EBC$, въ которомъ $EB = BC$, потому что $\smile EB = \smile BC$ (§ 71, случай 2), и слѣдов. $\angle BCE = \angle BEC$ (§ 52, теор. 1), притомъ $\angle ABC = \angle BCE$ по § 43 теор. 4. Но, по 1-й теоремѣ,

$$\angle BEC = \frac{\angle BOC}{2}, \text{ значитъ и } \angle ABC = \frac{\angle BOC}{2}.$$

Теорема 3. *Уголъ съ вершиною внутри окружности равенъ половинѣ суммы центральныхъ угловъ, дуги которыхъ заключены между сторонами даннаго угла и продолженіемъ этихъ сторонъ.*

Пусть данъ $\angle ABC$ (чер. 118) и требуется доказать, что

$$\angle ABC = \frac{\angle AOC + \angle EOD}{2}.$$

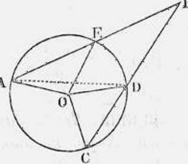
Чер. 118.

Доказ. Соединимъ точки C и D прямою CD, то уголъ ABC есть внѣшній уголъ $\triangle CBD$, а потому (§ 48) $\angle ABC = \angle ADC + \angle DCE$. Но, по теор. 1,

$$\angle ADC = \frac{\angle AOC}{2} \text{ и } \angle DCE = \frac{\angle EOD}{2}; \text{ слѣд.}$$

$$\angle ABC = \frac{\angle AOC + \angle EOD}{2}.$$

Теорема 4. *Уголъ съ вершиною внѣ окружности равенъ половинѣ разности центральныхъ угловъ, дуги которыхъ заключены между сторонами даннаго угла.* Разсмотримъ три случая отдѣльно.



Чер. 119.

1-й случай. Пусть данъ $\angle ABC$ (чер. 119), стороны котораго сѣкущія, и требуется доказать, что

$$\angle ABC = \frac{\angle AOC - \angle EOD}{2}.$$

Доказ. Соединимъ A съ D прямою AD, тогда уголъ ADC будетъ внѣшнимъ угломъ $\triangle ABD$, и слѣдов. (§ 48):

$$\angle ADC = \angle ABC + \angle EAD,$$

откуда

$$\angle ABC = \angle ADC - \angle EAD;$$

по, по теор. 1-й, $\angle ADC = \frac{\angle AOC}{2}$ и $\angle EAD = \frac{\angle EOD}{2}$;

вставляя, получимъ: $\angle ABC = \frac{\angle AOC - \angle EOD}{2}$.

2-й случай. Пусть данъ $\angle ABC$ (чер. 120), стороны ко-

тораго: сѣкущая BA и касательная BC; требуется доказать, что $\angle ABC = \frac{\angle AOC - \angle EOC}{2}$.

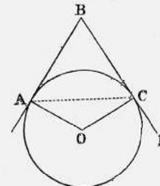
Чер. 120.

Доказ. Соединяя A съ C прямою AC, получимъ $\triangle ABC$; тогда внѣшній $\angle ACG = \angle ABC + \angle BAC$; откуда $\angle ABC = ACG - \angle BAC$. Но, по теор. 2-й, $\angle ACG = \frac{\angle AOC}{2}$ и, по теор. 1-й, $\angle BAC = \frac{EOC}{2}$.

Слѣдов. $\angle ABC = \frac{\angle AOC - \angle EOC}{2}$.

3-й случай. Пусть данъ описанный $\angle ABC$ (чер. 121), т. е. уголъ, стороны котораго касательныя BA и BC. Требуется доказать, что

Чер. 121.



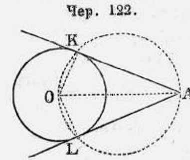
$\angle ABC = \frac{(4d - \angle AOC) - \angle AOC}{2} = 2d - \angle AOC$.

Доказ. Соединимъ A и C прямою AC, то въ $\triangle ABC$ внѣшній $\angle ACE = \angle ABC + \angle BAC$ (§ 48). Откуда $\angle ABC = \angle ACE - \angle BAC$. Но, по теор. 2, $\angle ACE = \frac{4d - \angle AOC}{2}$ и $\angle BAC = \frac{\angle AOC}{2}$. Слѣд. $\angle ABC = \frac{(4d - \angle AOC) - \angle AOC}{2} = 2d - \angle AOC$.

Задача. *Чрезъ данную точку внѣ окружности провести касательную къ этой окружности.*

Рѣшеніе. Принимая разстояніе AO данной точки A (чер. 122) отъ центра O данной окружности за діаметръ, опишемъ другую окружность, которая пересѣчетъ данную въ двухъ точкахъ K и L. Соединивъ точку A съ точками K и L, получимъ двѣ касательныя AK и AL къ окружности, потому что $\angle AKO$ и $\angle ALO$ суть прямые углы (теор. 1, слѣд. 2) и слѣдов. AK и AL перпендикулярны къ радіусамъ (§ 70, теор. 1).

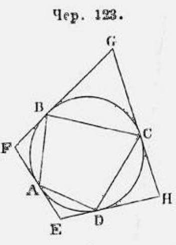
Чер. 122.



Вписанные и описанные многоугольники.

§ 73. Если на окружности возьмемъ нѣсколько точекъ, напр. (чер. 123) точки A,B,C,D и соединимъ ихъ прямыми AB,BC,CD,DA, то получимъ многоугольникъ, который называется вписаннымъ; т. е. *вписаннымъ* называется многоугольникъ, вершины угловъ котораго лежатъ на окружности. Если же чрезъ нѣсколько точекъ, напр. A,B,C,D, окружности проведемъ касательныя, то каждая касательная, напр. въ A, пересѣчетъ въ одной точкѣ каждую изъ касательныхъ двухъ точекъ B и D, между которыми лежитъ A, и такимъ образомъ получится многоугольникъ EFGH, называемый описаннымъ; т. е. *описаннымъ* называется многоугольникъ, стороны котораго суть касательныя къ окружности.

Чер. 123.

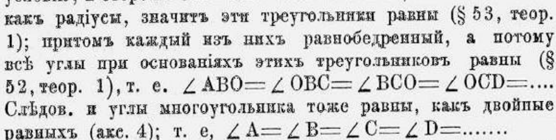


Теорема 1. *Всякій равносторонній вписанный многоугольникъ есть и равноугольный, т. е. правильный.*

Пусть данъ вписанный многоугольникъ ABCDEF (чер. 124), у котораго стороны равны и требуется доказать, что онъ правильный, т. е. и углы его равны.

Чер. 124.

Доказ. Соединимъ вершины многоугольника съ центромъ O прямыми; получимъ треугольники: $\triangle AOB$; $\triangle BOC$; $\triangle COD$ и т. д., у которыхъ стороны $AB = BC = CD = \ldots\ldots$, по условію, и стороны $OA = OB = OC = OD = \ldots$, какъ радіусы, значитъ эти треугольники равны (§ 53, теор. 1); притомъ каждый изъ нихъ равнобедренный, а потому всѣ углы при основаніяхъ этихъ треугольниковъ равны (§ 52, теор. 1), т. е. $\angle ABO = \angle OBC = \angle BCO = \angle OCD = \ldots$. Слѣдов. и углы многоугольника тоже равны, какъ двойные равныхъ (акс. 4); т. е, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \ldots\ldots$



Слѣдствіе. *Если окружность раздѣлена на равныя части, то, соединяя послѣдовательныя точки дѣленія прямыми, получимъ правильный вписанный многоугольникъ.*

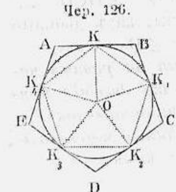
Теорема 2. *Всякій равноугольный описанный многоугольникъ есть и равносторонній, т. е. правильный.*

Пусть данъ описанный многоугольникъ ABCDE (чер. 125), у котораго углы равны, и требуется доказать, что онъ правильный, т. е. что и стороны равны.

Чер. 125.

Доказ. Соединимъ вершины угловъ и точки касанія сторонъ прямыми съ центромъ O. Треугольники OBK и OBK_1 прямоугольные (§ 70, теор. 2); притомъ они имѣютъ общую гипотенузу OB и равные, какъ радіусы, катеты OK и OK_1, а потому эти треугольники равны между собою (§ 53, теор. 3, слѣд.), слѣдов., прямая OB дѣлитъ уголъ B пополамъ. Такимъ же образомъ докажемъ, что каждая изъ прямыхъ, соединяющихъ центръ O съ вершиною угла, раздѣляетъ уголъ многоугольника пополамъ, и такъ какъ, по условію, углы многоугольника равны, то и половины ихъ равны (акс. 4), т. е. $\angle KBO = \angle K_1BO = \angle K_1CO = \angle K_2CO = \ldots\ldots\ldots$ Вслѣдствіе этого треугольники ABO, BCO, CDO и т. д. равны между собою, такъ какъ имѣютъ по два равныхъ угла и по равной сторонѣ (§ 53, теор. 4); такъ: $\triangle ABO = \triangle BCO$, потому что у нихъ сторона BO общая; $\angle KBO = \angle K_1BO$ и $\angle KAO = \angle K_1CO$. Изъ равенства этихъ треугольниковъ слѣдуетъ, что $AB = BC = CD = \ldots$ и т. д., т. е. что многоугольникъ правильный.

Слѣдсвіе 1. Такъ какъ $\angle KBO = \angle K_1BO = \angle K_1CO = \angle K_2CO = \ldots$, то и $\angle KOB = \angle BOK_1 = \angle K_1OC = \angle COK_2 = \ldots$, (§ 50, слѣд. 2), а потому соотвѣтствующія этимъ угламъ дуги также равны между собою (§ 28, теор. 1). Слѣд. *прямыя, соединяющія центръ окружности съ вершинами и съ точками касанія сторонъ правильнаго описаннаго многоугольника образуютъ при центрѣ равные углы и дѣлятъ окружность на равныя части.*



Чер. 126.

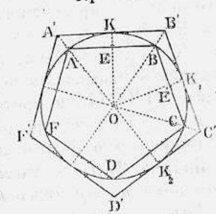
Слѣдствіе 2. *Если окружность раздѣлена на нѣсколько равныхъ частей, то, проведя касательныя въ точкахъ дѣленія, составимъ правильный описанный многоугольникъ,* потому что углы такого многоугольника ABCDE (чер. 126) равны. Въ самомъ дѣлѣ: если соединимъ точки касанія прямыми, то получимъ правильный вписанный многоугольникъ $KK_1K_2K_3K_4$

(теор. 1, слѣд.) и слѣдов. $\triangle KOK_1 = \triangle K_1OK_2 = \triangle K_2OK_3 = \ldots$
(§ 53, теор. 1); а потому и $\angle KOK_1 = \angle K_1OK_2 = \angle K_2OK_3 = \ldots$
Но, по § 72 теор. 4 случай 3-й, имѣемъ: $\angle B = 2d - \angle KOK_1$;
$\angle C = 2d - \angle K_1OK_2$; $\angle D = 2d - K_2OK_3$; и т. д. Откуда
слѣдуетъ, что $\angle B = \angle C = \angle D = \ldots\ldots$ (акс. 1), т. е., что опи-
санный многоугольникъ, равноугольный, а потому и правиль-
ный (теор. 2).

Теорема 3. *Касательныя, проведенныя чрезъ средины дугъ,*
стягиваемыхъ сторонами правильнаго вписаннаго многоуголь-
ника, образуютъ одноименный правильный описанный много-
угольникъ, стороны котораго параллельны сторонамъ впи-
саннаго и вершины лежатъ на прямыхъ, проходящихъ чрезъ
центръ и вершины вписаннаго.

Пусть ABCDF (чер. 127) есть правильный вписанный много-
угольникъ, чрезъ средины дугъ AB, BC и т. д. проведены
касательныя, образующія многоуголь-
никъ описанный A′B′C′D′F′. Требует-
ся доказать, что этотъ многоуголь-
никъ правильный; что AB || A′B′;
BC || B′C′ и т. д., и что его верши-
ны A′, B′, C′, D′, F′ лежатъ на пря-
мыхъ OA; OB; OC… послѣдова-
тельно.

Чер. 127.



Доказ. Точки касанія сторонъ опи-
саннаго многоугольника находятся
на срединахъ равныхъ дугъ и слѣд.
въ этихъ точкахъ окружность дѣлится на равныя между со-
бою части, а потому многоугольникъ A′B′C′D′F′ правильный
(теор. 2, слѣд. 2). Соединяя точки касанія сторонъ съ цент-
ромъ прямыми OK; OK_1; и т. д., имѣемъ: A′B′ ⊥ OK (§ 70,
теор. 2) и такъ какъ точка K на срединѣ ◡AB, то и AB ⊥ OK
(§ 68); слѣдов. A′B′ || AB (§ 43, теор. 1). Такимъ же обра-
зомъ докажемъ параллельность всѣхъ сторонъ. Наконецъ, если
соединимъ вершину B вписаннаго многоугольника съ цент-
ромъ прямою BO, то изъ равенства прямоугольныхъ треуголь-
никовъ BOE и BOE′ (§ 53, теор. 3, слѣд.), имѣющихъ об-
щую гипотенузу OB и по равному катету OE = OE′ (§ 69,
теор. 1), заключаемъ, что $\angle BOE = \angle BOE'$, т. е. прямая OB
есть равнодѣлящая угла KOK_1. Если же соединимъ верши-
ну B′ описаннаго многоугольника съ центромъ прямою B′O,
то получимъ $\triangle B'OK = \triangle B'OK_1$, потому что гипотенуза B′O

общая и катетъ $OK=OK_1$, какъ радіусы; слѣд. $\angle B'OK=\angle B'OK_1$, т. е. прямая OB' есть равнодѣлящая того же угла KOK_1. Изъ этого заключаемъ, что обѣ прямыя OB и OB' составляютъ одну и ту-же прямую, т. е. что вершина B' описаннаго многоугольника лежитъ на прямой BO, проходящей чрезъ центръ O и вершину B вписаннаго. Такимъ же образомъ докажемъ и для всѣхъ вершинъ.

Задача 1. *По данному правильному вписанному многоугольнику построить одноименный правильный описанный многоугольникъ.*

Рѣш. 1-е. Чрезъ вершины K, K_1, K_2.... (чер. 126) правильнаго вписаннаго многоугольника проведемъ касательныя къ окружности, образующія описанный многоугольникъ $ABCDE$, который (теор. 1, слѣдст. 2) есть правильный.

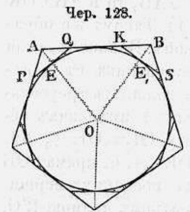
Рѣш. 2-е. Изъ центра окружности (чер. 127) опустимъ перпендикуляры на стороны правильнаго вписаннаго многоугольника и продолжимъ ихъ до пересѣченія въ точкахъ K, K_1, K_2 и т. д. съ окружностью; потомъ чрезъ точки K, K_1, K_2... проведемъ касательныя, которыя, на осн. теор. 3, составятъ правильный одноименный описанный многоугольникъ $A'B'C'D'F'$, и притомъ вершины этого многоугольника будутъ лежать на продолженіи радіусовъ OA, OB и т. д., а стороны его будутъ параллельны сторонамъ вписаннаго.

Задача 2. *По данному правильному описанному многоугольнику построить одноименный правильный вписанный.*

Рѣш. 1-е. Въ точкахъ касанія даннаго многоуг. (чер. 126) окружность дѣлится на равныя части (теор. 2, слѣд. 1), поэтому должно соединить эти точки прямыми (теор. 1, слѣд.).

Рѣш. 2-е. Соединимъ вершины описаннаго многоугольника съ центромъ (чер. 127), и каждыя двѣ послѣдовательныя точки пересѣченія этихъ прямыхъ съ окружностью соединимъ между собою прямыми (теор. 2, слѣд. 1 и теор. 1, слѣд.).

Чер. 128.



Задача 3. *По данному правильному описанному многоугольнику построить правильный описанный съ двойнымъ числомъ сторонъ.*

Рѣш. Соединяя вершины даннаго многоугольника съ центромъ прямыми AO, BO.... (чер. 128) и проведя въ точкахъ E, E_1,.... касательныя, получимъ искомый правильный описанный многоугольникъ $PQRS$.... (теор. 2, слѣд. 1 и слѣд. 2).

Задача 4. *По данному правильному вписанному многоугольнику построить правильный вписанный съ двойнымъ числомъ сторонъ.*

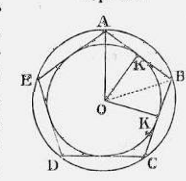
Рѣш. Опуская перпендикуляры изъ центра на стороны (чер. 129) и продолжая ихъ до пересѣченія съ окружностью, соединимъ точки E; E_1; E_2.... съ вершинами даннаго многоугольн., и получимъ искомый правильный многоугольникъ $AEBE_1C$...(теор. 1, слѣд.).

Чер. 129.

§ 74. Теорема 1. *Около всякаго правильнаго многоугольника можно описать и во всякій правильный многоугольникъ можно вписать окружность.*

Доказ. Если раздѣлимъ два угла A и B правильнаго многоугольника $ABCDE$ (чер. 130) прямыми AO и BO, то точка пересѣченія O этихъ прямыхъ есть центръ многоугольника, который находится въ равномъ разстояніи отъ вершинъ угловъ A, B, C, D, E и въ равномъ разстояніи отъ сторонъ, т. е. апоѳемы OK; OK_1 и т. д. равны (§ 65, теор. 1, зам.). Слѣд. если примемъ центръ многоугольника O за центръ двухъ окружностей и за радіусы: одной—разстояніе OA центра отъ вершины; а другой—длину апоѳемы OK, то первая окружность пройдетъ чрезъ вершины многоугольника и будетъ описанная; вторая коснется всѣхъ сторонъ и будетъ вписанная.

Чер. 130.



Слѣдствіе. *Центры описанной и вписанной окружностей и центръ правильнаго многоугольника совпадаютъ въ одной точкѣ, которая есть точка встрѣчи всѣхъ апоѳемъ и равнодѣлящихъ всѣхъ угловъ многоугольника.*

Чер. 131.

Теорема 2. *Около всякаго треугольника можно описать окружность и притомъ только одну.*

Данъ какой-нибудь $\triangle ABC$ (чер, 131) и требуется доказать, что существуетъ точка (центъ окружности описанной)

и притомъ только одна, находящаяся на равномъ разстояніи отъ трехъ точекъ A, B и C.

Доказ. Окружность должна пройти чрезъ точки A, B и C; слѣдовательно прямыя AB и BC должны быть ея хордами. Центры всѣхъ окружностей (значитъ и центръ искомой окружности), проходящихъ чрезъ двѣ точки A и B, лежатъ на перпендикулярѣ, проведенномъ чрезъ средину AB, т. е. на прямой EF, полагая что S есть средина AB и EF⊥AB (§ 68, слѣд. 2). Такимъ же образомъ центры окружностей, проходящихъ чрезъ точки B и C (слѣд. и искомой окружности), лежатъ на прямой IK, перпендикулярной къ BC и проходящей чрезъ точку R, средину BC. Слѣдов. центръ искомой окружности долженъ лежать на EF и IK, т. е. въ точкѣ пересѣченія O этихъ прямыхъ. Но двѣ прямыя могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ, и слѣдов. O есть единственный центръ искомой окружности, находящійся на разстояніи радіуса отъ вершинъ A, B и C.

Слѣдствіе. *Перпендикуляры, возставленные изъ срединъ трехъ сторонъ треугольника, проходятъ чрезъ одну общую точку, центръ описанной окружности*, потому что перпендикуляръ, возставленный изъ средины стороны AC, какъ изъ средины хорды описанной окружности, пройдетъ чрезъ центръ ея, т. е. чрезъ точку пересѣченія прямыхъ EF и IK (§ 68).

Теорема 3. *Во всякій треугольникъ можно вписать окружность и притомъ только одну.*

Чер. 132.

Стороны даннаго △ABC (чер. 132) должны касаться окружности вписанной и центръ долженъ лежать внутри даннаго треугольника на разстояніи радіуса искомой окружности отъ трехъ прямыхъ AB, BC и AC. Значитъ должно доказать, что существуетъ внутри треугольника точка и притомъ только одна, изъ которой перпендикуляры на три стороны треугольника имѣютъ равную длину.

Доказ. Всѣ точки, находящіяся въ равномъ разстояніи отъ двухъ сторонъ AB и AC треугольника ABC (значитъ и центръ искомой окружности), лежатъ на равнодѣлящей угла BAC, т. е. на прямой AI (§ 40, слѣд.). Такимъ-же образомъ всѣ точки, находящіяся въ равномъ разстояніи отъ сторонъ треугольника

AB и BC (значитъ и центръ искомой окружности), лежатъ на прямой BV, дѣлящей уголъ ABC пополамъ. Слѣд. центръ искомой окружности долженъ лежать на AI и BV, т. е. въ точкѣ пересѣченія O этихъ прямыхъ. Но двѣ прямыя могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ, и слѣдов. O есть единственный центръ искомой окружности, находящійся на разстояніи радіуса отъ сторонъ AC, AB и BC треугольника, т. е. OK = OL = OM.

Слѣдствіе. *Равнодѣлящія трехъ угловъ треугольника проходятъ чрезъ одну общую точку — центръ вписанной окружности*, потому что равнодѣлящая угла BCA пройдетъ чрезъ центръ вписанной окружности (§ 40, слѣд.), т. е. чрезъ точку пересѣченія O прямыхъ AI и BV.

Теорема 4. *Во всякомъ четыреугольникѣ, вписанномъ въ окружность, сумма двухъ противулежащихъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ.*

Чер. 133.

Пусть данъ какой нибудь вписанный четыреугольникъ ABCD (чер. 133); требуется доказать, что сумма двухъ противулежащихъ угловъ, напр. $\angle A + \angle C = 2d$.

Доказ. По § 72 теор. 1 замѣч. имѣемъ

$$\angle A = \frac{4d - \angle BOD}{2}; \quad \angle C = \frac{\angle BOD}{2}.$$

Слѣдов. $\angle A + \angle C = 2d$.

Теорема 5, *обр. Около всякаго четыреугольника, въ которомъ сумма противуположныхъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ, можно описать окружность.*

Пусть данъ четыреугольникъ ACBD (чер. 134), въ которомъ $\angle A + \angle B = 2d$ и слѣдов. тоже $\angle C + \angle D = 2d$ (§ 56, теор. 1). Требуется доказать, что около такого четыреугольника можно описать окружность.

Чер. 134.

Доказ. Если проведемъ окружность чрезъ три точки A, C и D (теор. 2), то эта окружность необходимо пройдетъ и чрезъ четвертую точку B, потому что если-бы B не лежала на окружности, а лежала-бы, напр. внутри ея, въ точкѣ B_1, то сумма угловъ A и B_1 не равнялась-бы $2d$. Въ самомъ дѣлѣ, $\angle A = \frac{4d - \angle DOC}{2}$ (§ 72, теор. 1, замѣч.) и $\angle B_1 = \frac{\angle DOC + \angle EOF}{2}$

(§ 72, теор. 3). Откуда $\angle A + \angle B_1 = 2d + \frac{\angle EOF}{2}$, и слѣдов. $\angle A + \angle B_1 > 2d$, что противно положенію. Подобнымъ-же образомъ докажемъ, что точка B не можетъ упасть внѣ окружности, а потому точка B упадетъ на окружность, и теорема доказана.

ОТДѢЛЪ IV.

Взаимное положеніе окружностей.

Окружности пересѣкающіяся и касательныя.

§ 75. **Теорема**. *Чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно всегда провести окружность и притомъ только одну.*

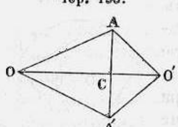
Доказ. Соединяя три точки, не лежащія на одной прямой, прямыми, получимъ треугольникъ; всякая окружность, проходящая чрезъ три данныя точки, есть описанная около этого треугольника. По § 74 теор. 2 около треугольника можно всегда описать окружность и притомъ только одну; слѣдов. чрезъ три точки, лежащія не на одной прямой, можно всегда провести окружность и притомъ только одну.

Слѣдствіе. *Тремя точками окружность совершенно опредѣляется.*

§ 76. **Теорема**. *Если двѣ окружности имѣютъ одну общую точку, не лежащую на прямой, соединяющей ихъ центры, то онѣ имѣютъ и еще одну общую точку.*

Пусть (чер. 135) точка A принадлежитъ двумъ окружностямъ, центры которыхъ O и O′, и требуется доказать, что эти окружности имѣютъ еще общую точку.

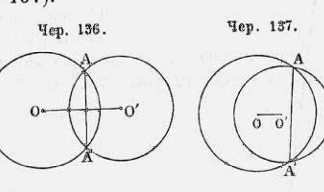
Чер. 135.



Доказ. Опустимъ изъ точки A перпендикуляръ AC на прямую OO′, соединяющую центры, и на продолженіи его отложимъ CA′=CA. Прямая OO′ есть перпендикуляръ, проходящій чрезъ средину AA′, а потому OA=OA′ и O′A=O′A′ (§ 35, теор. 2). Но OA есть радіусъ одной окружности, а O′A—другой, и слѣд. точка A′ лежитъ отъ центра каждой окружности на разстояніи ея радіуса, т. е. лежитъ на каждой изъ двухъ окружностей.

Если двѣ окружности имѣютъ двѣ общія точки, то онѣ называются *пересѣкающимися*. Центры обѣихъ пересѣкающихся окружностей могутъ лежать или по обѣ стороны хорды AA′, соединяющей точки ихъ пересѣченія (чер. 136), или по одну сторону ея (чер. 137).

Чер. 136. Чер. 137.



Слѣдствіе. *Прямая OO′, соединяющая центры двухъ пересѣкающихся окружностей, перпендикулярна къ хордѣ AA′, соединяющей точки пересѣченія, и раздѣляетъ эту хорду пополамъ.*

§ 77. **Теорема**. *Если двѣ окружности имѣютъ одну общую точку, лежащую на прямой, соединяющей ихъ центры, то другой общей точки онѣ имѣть не могутъ.*

Пусть (чер. 138) точка A лежитъ на двухъ окружностяхъ и на прямой, соединяющей ихъ центры O и O′; требуется доказать, что окружности не имѣютъ другой общей точки.

Чер. 138.

Доказ. Окружности не могутъ имѣть еще общей точки на прямой OO′, потому-что OO′ проходитъ черезъ центры, и слѣд. встрѣчаетъ каждую изъ окружностей только въ двухъ концахъ ея діаметра, а если-бы концы діаметровъ обѣихъ окружностей совпадали, то совпадали бы центры окружностей и обѣ окружности сливались бы въ одну. Окружности не могутъ имѣть общей точки и внѣ прямой OO′, потому-что тогда онѣ имѣли-бы по § 76-му двѣ общія точки внѣ прямой OO′ и еще одну общую точку A на этой прямой, т. е. имѣли-бы три общія точки, чего быть не можетъ (§ 75, слѣд.). Слѣдов. окружности имѣютъ только одну общую точку A.

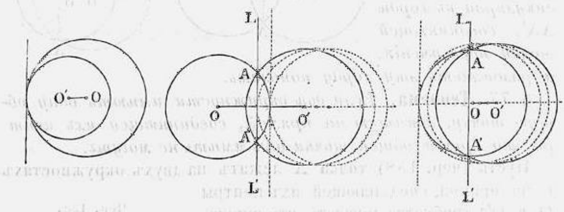
Если двѣ окружности имѣютъ одну общую точку, то онѣ называются *касательными*, и общая точка ихъ называется *точкою касанія*. Перпендикуляръ, возставленный изъ точки касанія къ прямой, соединяющей центры, есть общая касательная обѣихъ окружностей (§ 70, теор. 1).

Центры касательныхъ окружностей могутъ лежать или по

обѣ стороны ихъ общей касательной и тогда касаніе называется *внѣшнимъ* (чер. 139); или по одну сторону и тогда касаніе называется *внутреннимъ* (чер. 140).

Чер. 139.

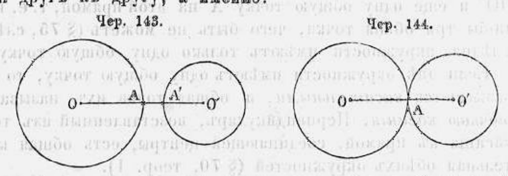
Вообразимъ себѣ двѣ пересѣкающіяся окружности (чер. 141 и 142) и положимъ, что одна изъ нихъ, напр. O, неподвижна, а другая O′ перемѣщается такъ, что центръ ея остается на прямой OO′, а точки пересѣченія сближаются между собою, то общая сѣкущая LL′ будетъ перемѣщаться, оставаясь



Чер. 140. Чер. 141. Чер. 142.

перпендикулярной къ прямой OO′. Хорда AA′ будетъ уменьшаться и точки A и A′ будутъ приближаться къ прямой центровъ. Когда точки пересѣченія придутъ на линію центровъ, то онѣ сольются въ одну общую точку;—окружности сдѣлаются касательными и общая сѣкущая обратится въ общую касательную. Вслѣдствіи этого можно сказать, что *касательными называются пересѣкающіяся окружности, когда двѣ точки ихъ пересѣченія сливаются въ одну точку.*

§ 78. Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что двѣ окружности могутъ имѣть пять различныхъ относительныхъ положеній другъ къ другу, а именно:



Чер. 143. Чер. 144.

1) Окружности могутъ лежать одна внѣ другой и не имѣть общей точки (чер. 143).

2) Могутъ лежать одна внѣ другой и имѣть одну общую точку, т. е. касаться внѣшне (чер. 144).

3) Могутъ пересѣкаться, т. е. имѣть двѣ общія точки (чер. 145).

4) Могутъ лежать одна внутри другой и имѣть одну общую точку, т. е. касаться внутренно (чер. 146).

5) Могутъ лежать одна внутри другой и не имѣть общей точки (чер. 147).

Если въ 5-мъ случаѣ центры окружностей совпадаютъ, то окружности называются *концентрическими* (cum centrum).

Чер. 145. Чер. 146. Чер. 147.

Соотвѣтственно этимъ пяти случаямъ разстояніе между центрами обѣихъ окружностей обладаетъ слѣдующими свойствами:

1) *Если двѣ окружности лежатъ одна внѣ другой и не имѣютъ общей точки, то разстояніе между центрами болѣе суммы радіусовъ.* Т. е., означая чрезъ r и r' радіусы окружностей O и O′ (чер. 143), имѣемъ:

$$OO'=OA+AA'+A'O' \text{ или (акс. 8) } OO'>r+r' \ (1).$$

2) *Если двѣ окружности касаются извнѣ, то разстояніе между центрами равно суммѣ радіусовъ.* Т. е. (чер. 144)

$$OO'=OA+O'A, \text{ или } OO'=r+r' \ (2)$$

3) *Если двѣ окружности пересѣкаются, то разстояніе между центрами менѣе суммы и болѣе разности радіусовъ.* Изъ $\triangle AOO'$ (чер. 145) имѣемъ (§ 46):

$$OO'<AO+AO' \text{ и } OO'>AO-AO'$$
$$\text{или } OO'<r+r' \text{ и } OO'>r-r' \ (3).$$

4) *Если двѣ окружности касаются изнутри, то разстояніе между центрами равняется разности радіусовъ.* Т. е. (чер. 146) $OO'=AO-AO'$ или $OO'=r-r'$. (4)

5) *Если двѣ окружности лежатъ одна внутри другой и не имѣютъ общей точки, то разстояніе между центрами менѣе разности радіусовъ.* Потому что (чер. 147)

$$OO'=OA-O'A'-A'A, \text{ или } OO'=r-r'-A'A$$

и слѣдов. (акс. 8) $OO' < r - r'$ (5).

Такимъ образомъ каждому изъ пяти возможныхъ случаевъ, соотвѣтствуетъ одно изъ пяти соотношеній (1) (2) (3) (4) и (5) между радіусами окружностей и разстояніемъ центровъ. Притомъ всѣ эти пять соотношеній различны между собою и слѣдов., если одно изъ пяти соотношеній дано, то окружности имѣютъ необходимо такое изъ пяти относительныхъ положеній, при которомъ данное соотношеніе существуетъ. Напр., если $OO' = r + r'$, то окружности необходимо касаются извнѣ, потому-что въ каждомъ изъ остальныхъ четырехъ случаевъ не было-бы $OO' = r + r'$.

1) *Если разстояніе между центрами болѣе суммы радіусовъ, то окружности лежатъ одна внѣ другой и не имѣютъ общей точки.*

2) *Если разстояніе между центрами равно суммѣ радіусовъ, то окружности касаются извнѣ.*

3) *Если разстояніе между центрами менѣе суммы и болѣе разности радіусовъ, то окружности пересѣкаются.*

4) *Если разстояніе между центрами равно разности радіусовъ, то окружности касаются изнутри.*

5) *Если разстояніе между центрами менѣе разности радіусовъ, то одна окружность лежитъ внутри другой и онѣ не имѣютъ общей точки.*

СПОСОБЪ ПРОПОРЦІЙ.

ОТДѢЛЪ V.

Отношеніе, мѣра и пропорціональность прямыхъ линій. Общая мѣра прямыхъ. Прямыя соизмѣримыя и несоизмѣримыя.

Отношеніе прямыхъ линій.

§ 79. Пусть даны двѣ прямыя AB и CD; всякая третья прямая KL, которая укладывается безъ остатка въ каждой изъ двухъ данныхъ, напр. въ AB — 5 разъ и въ CD — 3 раза, называется общей мѣрой прямыхъ AB и CD. Т. обр. *общей мѣрой двухъ прямыхъ называется прямая, укладывающаяся безъ остатка* (*цѣлое число разъ*) *въ каждой изъ двухъ данныхъ.*

Если KL есть общая мѣра AB и CD, то всякая часть KL, напр. $\frac{1}{2}$KL, $\frac{1}{3}$KL, будетъ тоже общей мѣрой AB и CD. Слѣдов. *двѣ прямыя могутъ имѣть множество общихъ мѣръ.* Мы будемъ искать наибольшую общую мѣру двухъ прямыхъ.

§ 80. *Найти общую наибольшую мѣру двухъ прямыхъ* AB *и* CD (черт. 148).

(Чер. 148.

A — E — B

C — G — D

Общая мѣра прямыхъ AB и CD не можетъ быть больше меньшей изъ нихъ CD, но можетъ равняться CD; посмотримъ не есть ли CD наибольшая общая мѣра данныхъ прямыхъ и для этого отложимъ CD на AB столько разъ, сколько возможно. Если не получится остатка, то CD будетъ общей наибольшей мѣрой. Но, если CD уложилась въ AB нѣсколько разъ, напр. два раза, и получился остатокъ EB, меньшій CD, то CD не есть общая мѣра прямыхъ. Всякая прямая, которая укладывается

безъ остатка въ CD и EB, уложится безъ остатка въ AB, и слѣдов. она уложится безъ остатка въ AB и CD; и обратно: всякая прямая, которая укладывается безъ остатка въ AB и CD, уложится безъ остатка и въ остаткѣ EB, слѣдов. она уложится безъ остатка въ CD и EB. Итакъ, общая наибольшая мѣра двухъ данныхъ прямыхъ AB и CD та же самая, какъ и общая наибольшая мѣра меньшей изъ нихъ CD и остатка EB. Слѣдов. вопросъ сводится къ опредѣленію общей наибольшей мѣры меньшей прямой CD и остатка EB.

Надъ прямыми CD и EB будемъ разсуждать такъ же, какъ и надъ данными AB и CD, т. е. общая наибольшая мѣра CD и EB не можетъ быть больше меньшей изъ нихъ EB, но можетъ равняться EB; посмотримъ не есть ли EB общая мѣра и для этого отложимъ EB на CD столько разъ, сколько возможно. Если EB уложится въ CD нѣсколько разъ безъ остатка, то EB будетъ общей наибольшей мѣрой CD и EB, а потому и прямыхъ AB и CD. Если же EB уложится въ CD нѣсколько разъ, напр. три раза, и получится остатокъ GD, меньшій EB, то общая наибольшая мѣра CD и EB будетъ та же, какъ перваго остатка EB и втораго остатка GD. Итакъ, вопросъ объ опредѣленіи наибольшей мѣры данныхъ прямымъ сводится къ вопросу объ опредѣленіи общей наибольшей мѣры 1-го остатка EB и 2-го остатка GD, надъ которыми будемъ опять разсуждать такъ же, какъ и надъ данными прямыми.

Такимъ-же образомъ продолжимъ далѣе, т. е. отложимъ 2-й остатокъ на 1-й и если получимъ 3-й остатокъ, то его отложимъ на 2-й и т. д., будемъ поступать до тѣхъ поръ, пока одинъ изъ остатковъ уложится въ предшествующемъ остаткѣ безъ новаго остатка и тогда уложившійся остатокъ будетъ общей наибольшей мѣрой AB и CD. Такъ напр. если 2-й остатокъ GD уложится въ 1-мъ остаткѣ EB безъ новаго остатка четыре раза, то GD будетъ общей наибольшей мѣрой AB и CD; въ самомъ дѣлѣ:

$$AB = 2CD + EB \quad (1)$$
$$CD = 3EB + GD \quad (2)$$
$$EB = 4GD \quad (3)$$

Вставляя EB изъ (3) въ (2) и (1), получимъ $CD = 13GD$ и $AB = 2CD + 4GD = 30GD$; изъ чего видно, что GD, заключаясь въ CD—13 разъ и въ AB—30 разъ, есть общая мѣра AB и CD, и притомъ наибольшая, потому что общая мѣра, заключаясь цѣлое число разъ въ AB и CD, должна вслѣдствіи (1) заключаться цѣлое число разъ въ EB и вслѣдствіи (2) въ GD, а потому общая мѣра не можетъ быть болѣе GD. Говоря вообще, найденная такимъ образомъ общая мѣра есть наибольшая, потому что она должна укладываться цѣлое число разъ въ послѣднемъ остаткѣ, и слѣдов. не можетъ быть болѣе его.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что способъ опредѣленія общей наибольшей мѣры двухъ прямыхъ одинаковъ съ способомъ опредѣленія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ. А именно:

Меньшая прямая откладывается на большей столько разъ, сколько возможно; остатокъ на меньшей прямой, второй остатокъ на первый остатокъ и т. д., каждый остатокъ накладывается на предыдущій остатокъ; если одинъ изъ остатковъ уложится безъ новаго остатка въ предыдущемъ, то онъ будетъ общею наибольшею мѣрою.

§ 81. Есть прямыя, у которыхъ нѣтъ общей мѣры, такъ напр. если будемъ искать общую наибольшую мѣру между гипотенузою и катетомъ равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника по вышесказанному, то не получится остатка, который уложился-бы безъ новаго остатка въ остаткѣ предшествующемъ, сколько-бы мы ни продолжили дѣйствіе. Въ самомъ дѣлѣ, пусть данъ прямоугольный треугольникъ ABC (черт. 149), въ которомъ $AB = AC$. Чтобы найти общую наибольшую мѣру прямыхъ BC и AC, отложимъ AC на BC отъ точки B и пусть $BD = AC$, то гипотенуза BC равняется катету AC, сложенному съ остаткомъ DC. Этотъ остатокъ должно откладывать на AC. Соединяя точки A и D прямою, и изъ точки D возставляя перпендикуляръ DK къ BC, получимъ прямоугольный треугольникъ KDC, который то-же равнобедренный, потому что $\angle DCA = d/_2$, значитъ и $\angle DKC = d/_2$, слѣдоват. $DC = DK$ (§ 52, теор. 2); притомъ и $\triangle AKD$ тоже равнобедренный, такъ какъ $BD = AC = AB$ и значитъ $\angle BDA = \angle BAD$; вычитая эти равные углы изъ прямыхъ угловъ BDK и BAK, получимъ равные, т. е. $\angle BDK - \angle BDA = \angle BAK - \angle BAD$, или $\angle ADK = \angle DAK$, и слѣдов. $DK = AK$. Откладывая остатокъ DC на AC отъ точки A, онъ совмѣстится съ AK, такъ какъ $DC = DK = AK$ и еще разъ уложится въ KC съ нѣкоторымъ остаткомъ EC. Т. обр. вопросъ сво-

Чер. 149.

дится къ опредѣленію общей мѣры гипотенузы KC и катета DC новаго равнобедреннаго и прямоугольнаго $\triangle KDC$. Относительно этого треугольника должно сказать тоже, что относительно даннаго, и вопросъ сведется къ отысканію общей наибольшей мѣры между гипотенузою и катетомъ третьяго равнобедреннаго и прямоугольнаго треугольника IEC и т. д. Изъ этого видно, что сколько-бы ни продолжали дѣйствіе будемъ всегда получать остатки, и слѣдов. гипотенуза и катетъ равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника не имѣютъ общей мѣры. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что діагональ и сторона квадрата не имѣютъ общей мѣры. Двѣ прямыя, имѣющія общую мѣру, называются *соизмѣримыми*, а не имѣющія ея,—*несоизмѣримыми*.

§ 82. Въ § 15 было сказано, что *длиною конечной прямой называется цѣлое или дробное число, показывающее точно или какъ угодно близко къ точности сколько разъ въ данной прямой укладывается или прямая, принятая за единицу мѣры, или какая нибудь часть этой единицы.* Притомъ, если единица мѣры укладывается безъ остатка, то длина прямой есть число цѣлое. Если-же получится остатокъ, то должно единицу мѣры раздѣлить на столько равныхъ частей, чтобы эта часть уложилась въ данной прямой безъ остатка, и длина будетъ дробь, знаменатель которой показываетъ на сколько равныхъ частей раздѣлена единица мѣры, а числитель—сколько такихъ частей укладывается въ данной прямой. Т. обр. вопросъ сводится къ отысканію общей мѣры данной прямой съ единицею. Если данная прямая соизмѣрима съ единицею, то длина ея опредѣлится точно; притомъ длина эта будетъ число цѣлое, когда единица есть общая наибольшая мѣра, и число дробное, если общей мѣрой будетъ часть единицы; знаменатель дроби будетъ показывать сколько разъ общая мѣра укладывается въ единицѣ, а числитель въ данной прямой. Если же данная прямая несоизмѣрима съ единицею, то длина ея не можетъ быть найдена точно, а только приближенно, на сколько угодно близко къ точности. Такъ пусть прямая AB (чер. 150) несоизмѣрима съ единицею CD, то, раздѣляя CD на n равныхъ частей, будемъ эту часть откладывать въ AB столько разъ, сколько возможно, положимъ m разъ, пока не получимъ остатокъ EB меньшій одного

Чер. 150.

A ——— E ——— B

C ——— D

дѣленія CD, тогда прямая AE будетъ соизмѣрима съ CD и длина этой прямой будетъ дробь $\frac{m}{n}$. Увеличивая число n, остатокъ EB можетъ быть сдѣланъ какъ угодно малымъ, такъ какъ этотъ остатокъ меньше $\frac{CD}{n}$, и т. обр. получимъ прямую AE, какъ угодно близкую къ AB и длина которой есть дробь $\frac{m}{n}$.

Прямая, которая не имѣетъ общей мѣры съ единицею, называется *несоизмѣримой* прямой.

§ 83. *Отношеніемъ одной прямой къ другой называется число, показывающее сколько разъ въ первой прямой заключается вторая, или какую часть первая прямая составляетъ отъ второй.*

Отношеніе прямой AB къ CD означается такъ $\frac{AB}{CD}=m$, или такъ $AB:CD=m$. Обратное отношеніе изображается такъ $\frac{CD}{AB}=\frac{1}{m}$, или $CD:AB=\frac{1}{m}$.

Когда извѣстна общая мѣра двухъ прямыхъ AB и CD, то отношеніе ихъ выразится отношеніемъ чиселъ, показывающихъ сколько разъ общая мѣра содержится въ каждой изъ нихъ. Въ самомъ дѣлѣ, если общую мѣру прямыхъ AB и CD означимъ черезъ k и положимъ, что она содержится m разъ въ AB и n разъ въ CD, то $AB=mk$ и $CD=nk$, и слѣдов.

$$\frac{AB}{CD}=\frac{mk}{nk}=\frac{m}{n}.$$

Если общая мѣра k прямыхъ AB и CD есть наибольшая, то числа m и n взаимно-простыя, потому-что если бы m и n имѣли общаго множителя q, то $\frac{m}{q}=r$ и $\frac{n}{q}=s$ или $m=r.q$ и $n=s.q$, а потому $AB=r.q.k$ и $CD=s.q.k$; откуда видно, что прямыя AB и CD имѣли бы общей мѣрой $q.k$ большее k.

Изъ опредѣленія длины прямой § 82 слѣдуетъ, что можно тоже *длиною прямой* назвать *отношеніе этой прямой къ единицѣ мѣры.* Когда двѣ прямыя соизмѣримы, то отношеніе ихъ выразится цѣлымъ или дробнымъ числомъ. Если-же прямыя несоизмѣримы, то должно умѣть находить приближенное отношеніе ихъ, на сколько угодно близкое къ истинному.

Найти приближенное отношеніе двухъ конечныхъ прямыхъ AB *и* CD.

Пусть требуется найти отношеніе $\frac{AB}{CD}$ съ точностью $\frac{1}{100}$, т. е. нужно найти приближенное отношеніе, которое отличалось бы отъ истиннаго менѣе, чѣмъ на $\frac{1}{100}$. Вообразимъ себѣ, что прямая CD раздѣлена на 100 равныхъ частей и что $\frac{CD}{100}$ укладывается въ AB напр. 17 разъ, но не укладывается 18 разъ, то

$$AB > \frac{17}{100}CD \text{ и } AB < \frac{18}{100}CD.$$

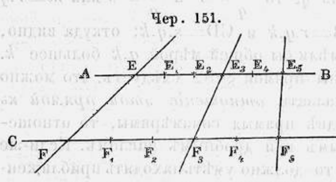
$$\text{или } \frac{AB}{CD} > \frac{17}{100} \text{ и } \frac{AB}{CD} < \frac{18}{100}.$$

Слѣдов. $\frac{AB}{DC}$ заключается между дробями $\frac{17}{100}$ и $\frac{18}{100}$ которыя разнятся на $\frac{1}{100}$, поэтому отношенія $\frac{AB}{CD}$ и $\frac{17}{100}$ дадутъ разность, которая менѣе $\frac{1}{100}$; значитъ $\frac{AB}{CD}=\frac{17}{100}$ съ точностью $\frac{1}{100}$.

Пропорціональныя прямыя. Средняя пропорціональная двухъ прямыхъ.

§ 84. Если съ удлиненіемъ или укорачиваніемъ одной изъ двухъ прямыхъ другая тоже измѣняется, то прямыя называются *зависимыми* между собою. Напр. пусть двѣ прямыя AB и CD (чер. 151) пересѣчены прямою EF. Отложимъ на AB отъ точки E произвольныя, но равныя между собою части $EE_1=E_1E_2=E_2E_3$.. и т. д.; на прямой CD отъ F такія же или другія равныя части $FF_1=F_1F_2=F_2F_3$... и т. д. Проведемъ чрезъ какія-нибудь двѣ соотвѣтствующія точки

Чер. 151.



прямую, которая можетъ перемѣщаться, переходя изъ двухъ соотвѣтствующихъ точекъ въ двѣ другія, соотвѣтствующія точки. Напр. чрезъ точки E_3 и F_3 проведемъ прямую E_3F_3, такъ чтобы отрѣзки EE_3 и FF_3, заключающіеся между прямыми EF и E_3F_3, имѣли равное число дѣленій, то эти отрѣзки будутъ прямые зависимые между собою, потому что если подвижная прямая перемѣстится изъ положенія E_3F_3, напр. въ положеніе E_5F_5, т. е. если одинъ изъ отрѣзковъ EE_3 измѣнится въ EE_5, то и другой отрѣзокъ FF_3 измѣнится въ FF_5. Въ приведенномъ примѣрѣ отношеніе между двумя значеніями отрѣзка на прямой AB, есть $\frac{EE_3}{EE_5}=\frac{3.EE_1}{5.EE_1}=\frac{3}{5}$, отношеніе-же между соотвѣтствующими значеніями отрѣзка на CD есть $\frac{FF_3}{FF_5}=\frac{3.FF_1}{5.FF_1}=\frac{3}{5}$; и слѣд. (акс. 1) $\frac{EE_3}{EE_5}=\frac{FF_3}{FF_5}$. Откуда видно, что разсматриваемые отрѣзки представляютъ собою такія двѣ зависимыя прямыя, что отношеніе между двумя произвольными значеніями первой прямой (т. е. $\frac{EE_3}{EE_5}$) равно отношенію между соотвѣтствующими значеніями второй (т. е. $\frac{FF_3}{FF_5}$); такія зависимыя прямыя называются прямо пропорціональными или, просто, пропорціональными. То есть, *двѣ зависимыя прямыя называются прямо-пропорціональными, если съ измѣненіемъ одной другая измѣняется такъ, что отношеніе между двумя какими угодно значеніями первой прямой равно отношенію между соотвѣтствующими значеніями второй.* Другими словами: *двѣ прямыя называются прямо-пропорціональными, если онѣ измѣняются вмѣстѣ и въ томъ-же отношеніи.*

Равенство двухъ отношеній составляетъ пропорцію, которая въ приведенномъ примѣрѣ есть

$$\frac{EE_3}{EE_5}=\frac{FF_3}{FF_5} \quad (1).$$

Какъ извѣстно пропорцію можно подвергать различнымъ видоизмѣненіямъ, и такимъ образомъ изъ четырехъ указанныхъ отрѣзковъ можно составить различныя пропорціи. Такъ

напр. изъ (1), перестанавливая средніе члены, получимъ пропорцію

$$\frac{EE_3}{FF_5}=\frac{EE_5}{FF_5},$$

значеніе которой видно по чертежу.

§ 85. Пересѣчемъ стороны $\angle ABC$ (чер. 152) прямою и представимъ себѣ, что эта прямая можетъ перемѣщаться, оставаясь параллельною самой себѣ, т. е. можетъ принимать положенія EF, E′F′, E″F″....., причемъ направленіе прямой остается тоже самое, тогда отсѣкаемые этой прямой отрѣзки будутъ вмѣстѣ измѣняться, и мы докажемъ, что отношеніе между всякими двумя отрѣзками на одной сторонѣ угла равно отношенію между соотвѣтствующими отрѣзками на другой, т. е. отрѣзокъ, отсѣкаемый прямою, перемѣщающеюся параллельно самой себѣ, на одной сторонѣ угла пропорціоналенъ отрѣзку на другой. Эту теорему обыкновенно выражаютъ такъ:

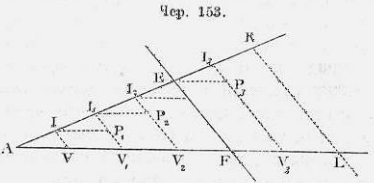
Чер. 152.

Теорема 1. *Если стороны угла разсѣчемъ параллельными между собою прямыми, то отрѣзки на одной сторонѣ угла пропорціональны отрѣзкамъ на другой.*

Пусть (чер. 153) EF || KL, и требуется доказать, что

$$\frac{AK}{AE}=\frac{AL}{AF}.$$

Доказ. Прямыя AK и AE могутъ быть соизмѣримы и несоизмѣримы; разсмотримъ каждый изъ этихъ случаевъ отдѣльно.



Чер. 153.

1-й случай. Прямыя AK и AE имѣютъ общую мѣру AI, и пусть эта общая мѣра укладывается въ AK—m разъ и въ AE—n разъ; тогда получимъ:

$$\frac{AK}{AE}=\frac{m}{n} \quad (1)$$

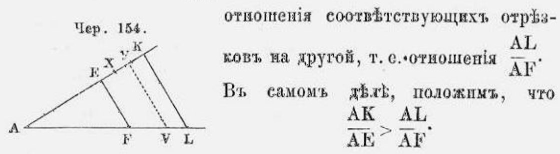
Проведемъ чрезъ точки дѣленій I, I_1, I_2,..... прямыхъ AK и AE рядъ прямыхъ IV, I_1V_1, I_2V_2...., параллельныхъ данному направленію сѣкущихъ, и рядъ прямыхъ IP_1, I_1P_2......, параллельныхъ прямой AL. Эти прямыя, пересѣкаясь, составятъ равные между собою треугольники $\triangle AVI=\triangle II_1P_1=$...... (§ 53, теор. 4), поэтому $AV=IP_1=$.....; но, по равенству противуположныхъ сторонъ параллелограмма (§ 58, теор. 1), $IP_1=VV_1$, $I_1P_2=V_1V_2$...., слѣдов. (акс. 1) $AV=VV_1=$ $=V_1V_2=$....., т. е. рядомъ прямыхъ, параллельныхъ данному направленію сѣкущихъ, прямая AL раздѣлится на m такихъ равныхъ частей, какихъ въ AF укладывается n, а потому имѣетъ (§ 83):

$$\frac{AL}{AF}=\frac{m}{n} \quad (2),$$

сравнивая (1) со (2), найдемъ (акс. 1):

$$\frac{AK}{AE}=\frac{AL}{AF}.$$

2-й случай. Прямыя AK и AE (чер. 154) несоизмѣримы; докажемъ, что и въ этомъ случаѣ отношеніе отрѣзковъ на одной сторонѣ, т. е. $\frac{AK}{AE}$ не можетъ быть ни болѣе ни менѣе отношенія соотвѣтствующихъ отрѣзковъ на другой, т. е. отношенія $\frac{AL}{AF}$.



Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что

$$\frac{AK}{AE}>\frac{AL}{AF}.$$

Чтобы первое изъ этихъ отношеній сдѣлать равнымъ второму, уменьшимъ его, взявъ вмѣсто AK другую прямую AX, меньшую AK, и притомъ такую, чтобы было:

$$\frac{AX}{AE}=\frac{AL}{AF} \quad (1).$$

Раздѣлимъ AE на столько равныхъ между собою частей, чтобы каждая часть была менѣе XK, и будемъ эту часть откладывать отъ точки A на прямой AK, тогда по крайней мѣрѣ одно изъ этихъ дѣленій упадетъ между точками X и K, напр. въ точку Y. Чрезъ эту точку Y проведемъ прямую YV || KL. Такъ какъ прямыя AY и AE соизмѣримы (ибо имѣютъ общую мѣру), то, по 1-му случаю, имѣемъ:

$$\frac{AY}{AE}=\frac{AV}{AF} \quad (2).$$

Раздѣливъ (1) на (2) получимъ:

$$\frac{AX}{AY}=\frac{AL}{AV}.$$

Что невозможно, потому что первое отношеніе $\frac{AX}{AY}<1$, такъ какъ $AX < AY$, а второе отношеніе $\frac{AL}{AV}>1$, такъ какъ $AL>AV$. Изъ этого видно, что невозможно допустить, чтобы отношеніе $\frac{AK}{AE}$ было болѣе $\frac{AL}{AF}$.

Подобнымъ-же образомъ докажемъ, что невозможно допустить, чтобы $\frac{AK}{AE}$ было менѣе $\frac{AL}{AF}$. Если-же $\frac{AK}{AE}$ не можетъ быть ни болѣе и ни менѣе $\frac{AL}{AF}$, то $\frac{AK}{AE}=\frac{AL}{AF}$ (акс. 9), что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. *Если двѣ прямыя пересѣчены параллельными прямыми, то отрѣзки ихъ между параллельными соотвѣтственно пропорціональны.*

Въ самомъ дѣлѣ, если двѣ прямыя пересѣкаются въ точкѣ A и EF || GH (чер. 155), то отрѣзокъ EG пропорціоналенъ FH, потому что когда прямая GH перемѣстится, напр. въ положеніе G_1H_1 || GH, то будемъ имѣть по доказанному: $\frac{AG_1}{AE}=\frac{AH_1}{AF}$ и $\frac{AG}{AE}=\frac{AH}{AF}$, откуда

Чер. 155.

$$\frac{AG_1-AE}{AE}=\frac{AH_1-AF}{AF} \text{ и } \frac{AG-AE}{AE}=\frac{AH-AF}{AF}, \text{ или}$$

$$\frac{EG_1}{AE}=\frac{FH_1}{AF} \text{ и } \frac{EG}{AE}=\frac{FH}{AF}.$$

Раздѣливъ предпослѣднюю пропорцію на послѣднюю, получимъ:

$$\frac{EG_1}{EG}=\frac{FH_1}{FH} \quad (1).$$

Точно также: $\frac{EG_1-EG}{EG}=\frac{FH_1-FH}{FH}$ или $\frac{GG_1}{EG}=\frac{HH_1}{FH}$ (2).

Изъ (1) и (2) видно, что отношеніе между двумя значеніями отрѣзка на одной прямой равно отношенію между соотвѣтствующими значеніями на другой, т. е. что отрѣзки пропорціональны.

Это справедливо и тогда, если одна изъ параллельныхъ сѣкущихъ проходитъ чрезъ вершину угла.

Если-же данныя прямыя параллельны между собою, то сказанное очевидно (§ 58, теор. 1).

Теорема 2, *обр. Если стороны угла пересѣчены прямыми такъ, что отрѣзки на одной сторонѣ угла относятся между собою, какъ соотвѣтственные отрѣзки на другой, то прямыя параллельны.*

Пусть (чер. 156) дано $\frac{AK}{AE}=\frac{AL}{AF}$; треб. доказ., что EF || KL.

Чер. 156.

Доказ. Положимъ, что KL не параллельна EF, и проведемъ чрезъ точку K прямую KX || EF, то, по теоремѣ 1-ой, имѣемъ пропорцію:

$$\frac{AK}{AE}=\frac{AX}{AF};$$

сравнивая эту пропорцію съ данной, видимъ, что эти пропорціи имѣютъ по три равныхъ соотвѣтственныхъ члена, слѣдов. и четвертые члены ихъ равны, т. е. $AL=AX$, чего быть не можетъ, такъ какъ AL есть часть AX; слѣдов. невозможно допустить, что KL не параллельна EF, а потому KL || EF.

§ 86. Если дана конечная прямая AB (чер. 157) и требуется найти на ней точку X такую, чтобы отношеніе $\frac{AX}{BX}$ равнялось отношенію данныхъ прямыхъ $m : n$, то говорятъ раздѣлить AB *внутренне въ отношеніи m къ n*, или просто *раздѣлить* AB *въ отношеніи m къ n*. Раздѣлить AB *внѣшне въ отношеніи m къ n* значитъ найти на продолженіи AB такую точку X′, чтобы отношеніе $\frac{AX'}{BX'}=\frac{m}{n}$.

Чер. 157.

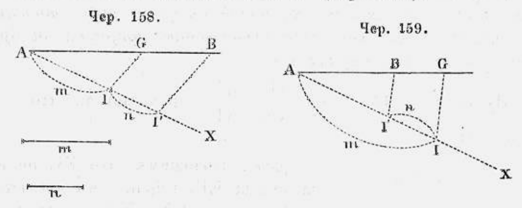
Задача 1. *Раздѣлить данную прямую AB внутренне въ отношеніи двухъ другихъ прямыхъ m и n* (чер. 158).

Рѣш. Подъ произвольнымъ угломъ проводимъ прямую AX и на ней отъ точки A откладываемъ $AI=m$, потомъ $II'=n$ точку I′ соединимъ съ B и чрезъ I проведемъ IG || I′B; тог-

да будемъ имѣть $\frac{AG}{GB}=\frac{m}{n}$ (§ 85, теор. I, слѣд.).

Если $m=n$, то AB раздѣлится пополамъ.

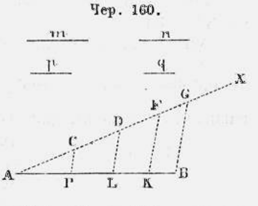
Задача 2. *Раздѣлить данную прямую* AB *внѣшне въ отношеніи двухъ прямыхъ m и n* (чер. 159).



Рѣш. Подъ произвольнымъ угломъ проведемъ прямую AX и на ней отложимъ $AI=m$; потомъ отъ I въ противную сторону отложимъ $II'=n$; соединимъ I' съ B прямою I'B и чрезъ точку I проведемъ IG || I'B, тогда будемъ имѣть: $\frac{AG}{BG}=\frac{m}{n}$.

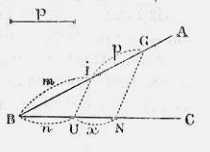
Задача 3. *Раздѣлить данную прямую* AB *на части, пропорціональныя нѣсколькимъ даннымъ прямымъ m, n, p* и *q*. (чер. 160).

Рѣш. Подъ произвольнымъ угломъ проведемъ прямую AX и на ней отъ точки A отложимъ послѣдовательно $AC=m$, $CD=n$, $DF=p$, $FG=q$. Затѣмъ, конецъ G послѣдней прямой FG соединимъ прямою GB съ точкою B, данной прямой. Чрезъ точки C, D, F проведемъ параллельно GB прямыя CP, DL и FK, которыя данную прямую раздѣлятъ въ требуемомъ отношеніи (§ 85, теор. 1, слѣд.).



Если $m=n=p=q=\ldots$, то прямая AB раздѣлится на равныя между собою части.

Задача 4. *Къ тремъ даннымъ прямымъ m, n, p* (чер. 161) *найти четвертую пропорціональную.*



Рѣш. Отложимъ на одной сторонѣ произвольнаго угла ABC послѣдовательно m и p, а на другой — n; соединимъ точки I и U прямою IU, и изъ точки G проведемъ GN || IU; прямая $UN=x$ есть искомая, потому-что будемъ имѣть (§ 85, теор. 1, слѣд.) пропорцію $\frac{m}{n}=\frac{p}{x}$.

Задача 5. *Чрезъ точку* A *внутри угла* LMN *провести сѣкущую, часть которой между сторонами угла дѣлилась-бы внутренне въ данной точкѣ* A *въ отношеніи двухъ данныхъ прямыхъ m и n* (чер. 162).

Рѣш. Чрезъ точку A проведемъ прямую AB, параллельную одной изъ сторонъ угла, напр. сторонѣ MN, и получимъ отрѣзокъ MB. Къ тремъ прямымъ MB, m и n найдемъ четвертую пропорціональную прямую X, т. е. прямую, которая удовлетворяла-бы пропорціи: $MB : X=m : n$ (зад. 4). Затѣмъ отложимъ $BC=X$, и чрезъ точки C и A проведемъ прямую CD, которая и есть искомая, потому-что AB || MN и слѣд. (§ 85, теор. 1, слѣд.) $AD : AC=MB : BC=m : n$.

Чер. 162.

Если $m=n$, то прямая CD въ данной точкѣ A раздѣлится пополамъ.

Задача 6. *Чрезъ точку* A, *данную внѣ угла* LMN, *провести сѣкущую, часть которой между сторонами угла дѣлилась-бы въ данной точкѣ* A *внѣшне въ отношеніи двухъ данныхъ прямыхъ m и n* (чер. 163).

Рѣш. Чрезъ точку A проведемъ прямую AB, параллельную одной изъ сторонъ угла, напр. сторонѣ MN, и получимъ отрѣзокъ MB. Къ тремъ прямымъ MB, m и n найдемъ четвертую пропорціональную прямую X, которая удовлетворяла-бы пропорціи: $MB : X=m : n$. Затѣмъ отложимъ $BC=X$ и чрезъ точки C и A проведемъ прямую AD, которая и есть искомая. Въ самомъ дѣлѣ, отложимъ $CE=AC$ и, проведя EF || MD, получимъ $\triangle FCE=\triangle ABC$ (§ 53, теор. 4), а потому $CF=CB$; но $CD:CE=MC:CF$ (§ 85, теор. 1), откуда

Чер. 163.

$$\frac{CD+CE}{CE}=\frac{MC+CF}{CF} \text{ или}$$

$$\frac{AD}{AC}=\frac{MB}{BC}=\frac{m}{n}.$$

Если $m=n$, то прямая CD раздѣлится внѣшне пополамъ, т. е. AD=2CD.

§ 87. **Теорема.** *Если стороны угла пересѣчены параллельными прямыми, то части этихъ параллельныхъ между сторонами угла соотвѣтственно пропорціональны отрѣзкамъ на каждой сторонѣ.*

Чер. 164.

Стороны угла BAC (чер. 164) пересѣчены прямою EF, которая можетъ перемѣщаться параллельно самой себѣ, напр. въ положеніе $E_1F_1 \parallel EF$; требуется доказать, что EF пропорціонально AF и AE, т. е. что $\frac{EF}{E_1F_1}=\frac{AF}{AF_1}=\frac{AE}{AE_1}$.

Доказ. Чрезъ точку E проведемъ прямую EH || AC, тогда по § 85 теор. 1 имѣемъ:

$$\frac{E_1F_1}{E_1H}=\frac{AE_1}{EE_1}$$

откуда (по извѣстному свойству пропорціи) имѣемъ, что

$$\frac{E_1F_1-E_1H}{E_1F_1}=\frac{AE_1-EE_1}{AE_1} \text{ или } \frac{HF_1}{E_1F_1}=\frac{AE}{AE_1}.$$

Но $HF_1=EF$, какъ противуположныя стороны параллелограмма (§ 58, теор. 1), слѣдов. $\frac{EF}{E_1F_1}=\frac{AE}{AE_1}$ и такъ какъ кромѣ того $\frac{AE}{AE_1}=\frac{AF}{AF_1}$ (§ 85, теор. 1), то имѣемъ:

$$\frac{EF}{E_1F_1}=\frac{AF}{AF_1}=\frac{AE}{AE_1}.$$

§ 88. Прямая XY (чер. 165), составляющая съ двумя данными прямыми AB и CD непрерывную пропорцію

$$\frac{AB}{XY}=\frac{XY}{CD},$$

называется *средней пропорціональной* прямыхъ AB и CD.

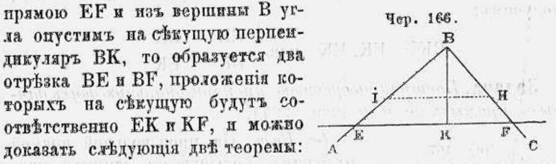
Чер. 165.

Изъ такой пропорціи имѣемъ:

$$XY^2=AB.\,CD, \text{ откуда } XY=\sqrt{AB.\,CD}.$$

Если стороны прямаго угла ABC (чер. 166) пересѣчемъ прямою EF и изъ вершины B угла опустимъ на сѣкущую перпендикуляръ BK, то образуется два отрѣзка BE и BF, проложенія которыхъ на сѣкущую будутъ соотвѣтственно EK и KF, и можно доказать слѣдующія двѣ теоремы:

Чер. 166.



Теорема 1. *Каждый отрѣзокъ на сторонѣ прямаго угла есть средная пропорціональная прямая между всей сѣкущей и проложеніемъ этого отрѣзка на сѣкущую*; т. е. должно доказать, что:

$$\frac{EF}{BF}=\frac{BF}{KF} \text{ и } \frac{EF}{EB}=\frac{EB}{EK}.$$

Доказ. Отложимъ на сторонѣ BE отъ точки B прямую BI=BK и чрезъ точку I проведемъ IH || EF, то получимъ $\triangle IBH=\triangle BKF$ (§ 53, теор. 4, слѣд. 2), потому что эти треугольники—прямоугольные и имѣютъ равные катеты BI и BK и равные острые углы BHI и BFK, какъ соотвѣтственные. На основаніи § 87 имѣемъ:

$$\frac{EF}{IH}=\frac{BF}{BH}.$$

Но, такъ какъ изъ равенства указанныхъ треугольниковъ IH=BF и BH=KF, то получимъ:

$$\frac{EF}{BF}=\frac{BF}{KF} \text{ или } BF^2=EF.\,KF.$$

Совершенно также докажемъ и вторую пропорцію, откладывая только высоту BK на сторонѣ BF и проводя опять прямую параллельную сѣкущей EF.

Теорема 2. *Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямаго угла на сѣкущую есть средняя пропорціональная между проложеніями отрѣзковъ сторонъ этого угла на сѣкущую.*

Доказ. Откладывая опять BI=BK и проводя IH || EF имѣемъ (§ 85, теор. 1):

$$\frac{BE}{BI}=\frac{BF}{BH},$$

или, такъ какъ BI=BK и BH=FK (теор. 1), то

$$\frac{BE}{BK}=\frac{BF}{FK}.$$

но, по теоремѣ 1-й, имѣемъ:

$$BF^2=EF.\,FK \text{ и } BE^2=EF.\,EK.$$

Исключая изъ этихъ трехъ послѣднихъ равенствъ BE и BF, получимъ:

$$BK^2=FK.EK \quad \text{или} \quad \frac{EK}{BK}=\frac{BK}{FK}.$$

Задача. *Построить среднюю пропорціональную двухъ данныхъ прямыхъ m и n* (чер. 167).

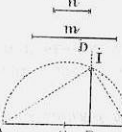
Чер. 167.

1-е Рѣш. На произвольной прямой отложимъ большую изъ данныхъ прямыхъ $AB=m$ и на ней меньшую $AC=n$; изъ точки C возставимъ перпендикуляръ CD къ AB и изъ средины O прямой AB, какъ центра, радіусомъ равнымъ $\frac{AB}{2}$, опишемъ дугу, которая пусть пересѣчетъ CD въ точкѣ I; эту точку соединимъ съ A прямою AI. Прямая AI и будетъ средняя пропорціональная данныхъ прямыхъ, потому что $\angle BIA$, какъ вписанный въ полуокружность, есть прямой, а потому, по теор. 1-й, имѣемъ:

$$\frac{AB}{AI}=\frac{AI}{AC} \quad \text{или} \quad \frac{m}{AI}=\frac{AI}{n}.$$

2-е Рѣш. На произвольной прямой отложимъ $AB=m$ (чер. 168), потомъ $BC=n$ и изъ точки B возставимъ перпендикуляръ BD къ AC; наконецъ, радіусомъ равнымъ $\frac{AC}{2}$ опишемъ дугу, принимая O, средину AC, за центръ; пусть эта дуга пересѣчетъ перпендикуляръ въ точкѣ I, тогда прямая BI есть искомая, потому что $\angle AIC$ прямой и, по теор. 2, имѣемъ:

Чер. 168.



$$\frac{AB}{BI}=\frac{BI}{BC} \quad \text{или} \quad \frac{m}{BI}=\frac{BI}{n}.$$

ОТДѢЛЪ VI.

Соотношеніе сторонъ, подобіе и мѣра площадей прямолинейныхъ фигуръ.

Соотношенія между сторонами треугольниковъ.

§ 89. **Теорема 1.** *Во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ квадратъ гипотенузы*, (т. е. числа, представляющаго ея длину) *равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ.*

Пусть данъ прямоугольный треугольникъ ABC (чер. 169) и требуется доказать, что $AB^2=AC^2+BC^2$.

Чер. 169.

Доказ. Опустимъ изъ вершины прямаго угла C перпендикуляръ CI на гипотенузу AB. Каждый катетъ есть средняя пропорціональная между всею гипотенузою и проложеніемъ этого катета на гипотенузу (§ 88, теор. I), т. е.

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AI} \quad \text{и} \quad \frac{AB}{BC}=\frac{BC}{BI}, \quad \text{или}$$

$$AC^2=AB.AI \quad \text{и} \quad BC^2=AB.BI.$$

Если сложимъ эти равенства и во второй части полученнаго равенства отдѣлимъ AB общимъ множителемъ, то будемъ имѣть:

$$AC^2+BC^2=AB(AI+BI),$$

но $AI+BI=AB$

и слѣдов. $AC^2+BC^2=AB^2$.

Слѣдствіе 1. *Гипотенуза равняется квадратному корню изъ суммы квадратовъ катетовъ.* На основаніи этого—если даны катеты, напр. $AC=4$ и $BC=3$, то гипотенуза опредѣлится такъ: $AB=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$.

Слѣдствіе 2. *Каждый катетъ равенъ квадратному корню изъ квадрата гипотенузы безъ квадрата другаго катета.* Потому что $AB^2=AC^2+BC^2$, откуда $BC^2=AB^2-AC^2$ и $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}$. На основаніи этого—если дана гипотенуза и одинъ изъ катетовъ, напр. $AB=5$ и $AC=4$, то другой катетъ будетъ: $BC=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3$.

Теорема 2. *Квадратъ стороны треугольника, лежащей противъ тупаго угла, равенъ суммѣ квадратовъ двухъ дру-*

гихъ сторонъ, вмѣстѣ съ удвоеннымъ произведеніемъ одной изъ этихъ сторонъ на проложеніе на нее другой.

Пусть въ △ ABC (чер. 170) уголъ C тупой и BD⊥AC, требуется доказать, что

$$AB^2=AC^2+BC^2+2AC.CD.$$

Чер. 170.

Доказ. По теор. 1, изъ прямоугольнаго треугольника ABD имѣемъ:

$$AB^2=BD^2+AD^2.... \quad (1),$$

изъ прямоугольнаго треугольника BCD:

$$BD^2=BC^2-CD^2;$$

но такъ какъ AD=AC+CD, то

$$AD^2=AC^2+2AC.CD+CD^2.$$

Вставляя въ равенство (1) на мѣсто BD^2 и AD^2 равныя имъ выраженія, найдемъ:

$$AB^2=AC^2+BC^2+2AC.CD.$$

Теорема 3. *Квадратъ стороны треугольника, лежащей противъ остраго угла, равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ, безъ удвоеннаго произведенія одной изъ этихъ сторонъ на проложеніе на нее другой.*

Пусть въ △ ABC (чер. 171) уголъ C острый и BD⊥AC. Требуется доказать, что

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC.CD.$$

Чер. 171.

Доказ. По теор. 1, изъ △ ABC имѣемъ:

$$AB^2=BD^2+AD^2.... \quad (2),$$

а изъ △ BDC, имѣемъ:

$$BD^2=BC^2-CD^2;$$

такъ какъ AC=AD+DC, то

$$AC^2=AD^2+2AD.DC+DC^2.$$

Вставляя на мѣсто BD^2 и AC^2 въ (2) равныя имъ выраженія, получимъ:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC.CD.$$

§ 90. Если условимся считать *проложеніе стороны* треугольника *положительнымъ*, когда оно лежитъ на сторонѣ треугольника (какъ на чер. 171 длина CD);—*отрицательнымъ*, въ случаѣ если это проложеніе находится на продолженіи стороны (какъ на чер. 170), и равнымъ нулю, если перпендикуляръ совпадаетъ со стороною (какъ проложеніе стороны BC на AC, въ чер. 169), то теоремы предыдущаго параграфа можно соединить въ одну и выразить ее такъ: *квадратъ стороны треугольника равенъ суммѣ квадратовъ*

двухъ другихъ сторонъ безъ удвоеннаго произведенія одной изъ этихъ двухъ сторонъ на проложеніе на нее другой стороны.

Замѣчаніе. Если стороны треугольника даны въ числахъ, то можно опредѣлить какой уголъ лежитъ противъ одной изъ его сторонъ—прямой, тупой или острый. Если квадратъ стороны равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ, то уголъ противъ нея прямой; если болѣе суммы квадратовъ двухъ другихъ сторонъ, — тупой, а если менѣе — острый.

§ 91. **Теорема 1.** *Сумма квадратовъ двухъ сторонъ треугольника равняется удвоенному квадрату разстоянія вершины угла между этими сторонами отъ средины третьей стороны, сложенному съ удвоеннымъ квадратомъ половины третьей стороны.*

Пусть въ △ CAD (чер. 172) CE=ED, и требуется доказать, что:

$$CA^2+DA^2=2AE^2+2CE^2.$$

Чер. 172.

Доказ. Опустимъ изъ A перпендикуляръ AI на CD, тогда изъ △ CAE, по § 89 теор. 2, имѣемъ:

$$CA^2=AE^2+CE^2+2CE.EI$$

и изъ △ DAE, по § 89, теор. 3, имѣемъ:

$$DA^2=AE^2+ED^2-2ED.EI.$$

Складывая два послѣднія равенства и замѣчая, что CE=ED, получимъ:

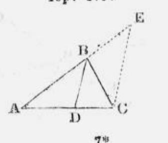
$$CA^2+DA^2=2AE^2+2CE^2.$$

Слѣдствіе. *Въ параллелограммѣ сумма квадратовъ діагоналей равняется суммѣ квадратовъ четырехъ сторонъ его,* потому что діагонали дѣлятся другъ другомъ пополамъ (§ 58, теор. 5).

Теорема 2. *Равнодѣлящая угла треугольника дѣлитъ противулежащую этому углу сторону на два отрѣзка, отношеніе которыхъ равно отношенію прилежащихъ къ нимъ сторонъ.*

Пусть данъ △ ABC (чер. 173) и ∠ABD=∠DBC; требуется доказать, что $\frac{DC}{DA}=\frac{BC}{BA}$.

Чер. 173.



Доказ. Чрезъ точку C проведемъ прямую CE || DB, которая пересѣчетъ продолженіе стороны AB въ нѣкоторой точкѣ

E, потому что EC || BD и чрезъ точку B не можетъ проходить другая прямая, параллельная CE (§ 43, слѣд. теор. 2), а поэтому EC и AB необходимо пересѣкутся. По § 85 слѣд. теор. 1-й имѣемъ пропорцію:

$$\frac{DC}{DA}=\frac{BE}{BA}.$$

Но $\angle BEC = \angle ABD$, какъ соотвѣтственные (§ 43, теор. 6); $\angle BCE = \angle DBC$, какъ накрестъ лежащіе (§ 43, теор. 4); такъ какъ, по условію, $\angle ABD = \angle DBC$, то и $\angle BEC = \angle BCE$ (акс. 1); слѣдов. BE=BC (§ 52, теор. 2). Вставляя BC на мѣсто BE въ послѣднюю пропорцію, получимъ:

$$\frac{DC}{DA}=\frac{BC}{BA}.$$

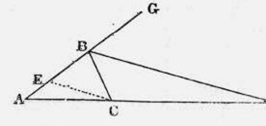
Теорема 3, *обр. Если прямая проходитъ чрезъ вершину угла треугольника и дѣлитъ сторону, противулежащую этому углу, на два отрѣзка, отношеніе которыхъ равно отношенію прилежащихъ къ нимъ сторонъ, то она есть равнодѣлящая этого угла.*

Пусть дано, что $\frac{DC}{DA}=\frac{BC}{BA}$, и требуется доказать, что $\angle ABD = \angle DBC$.

Доказ. Чрезъ точку C проведемъ CE || BD до встрѣчи съ продолженіемъ стороны AB, то по § 85 слѣд. теор. 1 имѣемъ пропорцію: $\frac{DC}{DA}=\frac{BE}{BA}$; сравнивая ее съ данной, получимъ BE=BC, и слѣдов. треугольникъ BEC равнобедренный, а потому $\angle BEC = \angle BCE$ (§ 52, теор. 1). Но $\angle BEC = \angle ABD$, какъ углы соотвѣтственные (§ 43, теор. 6); $\angle BCE = \angle DBC$, какъ накрестъ-лежащіе (§ 43, теор. 4), откуда (акс. 1) слѣдуетъ, что $\angle ABD = \angle DBC$, т. е. прямая BD есть равнодѣлящая $\angle B$.

Теорема 4. *Равнодѣлящая внѣшняго угла треугольника дѣлитъ внѣшне сторону, не проходящую чрезъ вершину этого угла, на отрѣзки, отношеніе которыхъ равно отношенію прилежащихъ къ нимъ сторонъ.*

Чер. 174.



Пусть въ $\triangle ABC$ (чер. 174) $\angle GBD = \angle DBC$; требуется доказать, что $\frac{DC}{DA}=\frac{BC}{BA}$.

Доказ. Черезъ точку C проведемъ прямую CE || DB. По § 85 слѣд. теор. 1, имѣемъ пропорцію:

$$\frac{DC}{DA}=\frac{BE}{BA}.$$

Но $\angle BEC = \angle GBD$, какъ углы соотвѣтственные (§ 43, теор. 6) $\angle BCE = \angle DBC$, какъ накрестъ-лежащіе (§ 43, теор. 4), и такъ какъ по условію $\angle GBD = \angle DBC$, то и $\angle BEC = \angle BCE$ (акс. 1), слѣдов. BE=BC. Вставляя BC на мѣсто BE въ послѣднюю пропорцію получимъ:

$$\frac{DC}{DA}=\frac{BC}{BA}.$$

Теорема 5, *обр. Если прямая проходитъ чрезъ вершину угла треугольника и дѣлитъ внѣшне противулежащую углу сторону на два отрѣзка, отношеніе которыхъ равно отношенію прилежащихъ къ нимъ сторонъ, то она есть равнодѣлящая внѣшняго угла.*

Пусть $\frac{DC}{DA}=\frac{BC}{BA}$; требуется доказать, что $\angle GBD = \angle DBC$.

Доказ. Чрезъ точку C проведемъ CE || DB до встрѣчи съ AB, то, по § 85 слѣд. теор. 1, имѣемъ пропорцію:

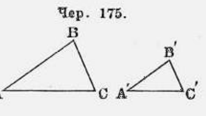
$$\frac{DC}{DA}=\frac{BE}{BA};$$

сравнивая съ данной, получимъ: BE=BC, и слѣдов. $\triangle BEC$ равнобедренный, а потому $\angle BEC = \angle BCE$ (§ 52, теор. 1). Но $\angle BEC = \angle GBD$, какъ углы соотвѣтственные (§ 43, теор. 6), $\angle BCE = \angle DBC$, какъ накрестъ-лежащіе (§ 43, теор. 4), откуда слѣдуетъ (акс. 1), что $\angle GBD = \angle DBC$, т. е. что прямая BD есть равнодѣлящая внѣшняго угла GBC треугольника.

Подобіе треугольниковъ.

§ 92. Треугольникъ ABC (чер. 175) называется подобнымъ $\triangle A'B'C'$, если $\angle A = \angle A'$; $\angle B = \angle B'$ и $\angle C = \angle C'$ и слѣдов. *подобными треугольниками называются такіе, въ которыхъ углы одного треугольника порознь равны угламъ другаго треугольника.*

Чер. 175.



Стороны подобныхъ треугольниковъ, лежащія противъ равныхъ угловъ, называются *сходственными*. Подобіе означаютъ зна-

комъ ∞; такъ $\triangle ABC \infty A'B'C'$ означаетъ, что эти два треугольника подобны.

Теорема. *Въ двухъ подобныхъ треугольникахъ отношенія сходственныхъ сторонъ равны между собою.*

Пусть (чер. 176) $\triangle ABC \infty \triangle A'B'C'$, т. е. $\angle A = \angle A'$; $\angle B = B'$ и $\angle C = C'$; требуется доказать, что $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$.

Чер. 176.

Доказ. Если отложимъ $AD = A'B'$ и проведемъ $DG \parallel BC$, то (§ 87) имѣемъ:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AG} = \frac{BC}{DG} \quad (1)$$

Но, по условію, $\angle A = \angle A'$ и $\angle B = \angle B'$; по отложенію $AD = A'B'$; притомъ $\angle ADG = \angle B$, такъ какъ $DG \parallel BC$ (§ 43, теор. 6) и, значитъ, $\angle ADG = \angle B'$; слѣдов. $\triangle ADG = \triangle A'B'C'$ (§ 53, теор. 4), а потому $DG = B'C'$ и $AG = A'C'$. Вставляя въ (1) вмѣсто послѣдующихъ членовъ равныя имъ (акс. 7), получимъ:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Слѣдствіе. Если стороны треугольника будутъ измѣняться, а углы остаются тѣ же, т. е. если съ измѣненіемъ сторонъ треугольникъ остается подобнымъ себѣ, то на основаніи доказанной теоремы, отношеніе двухъ произвольныхъ значеній одной стороны равно отношенію двухъ соотвѣтственныхъ значеній другой, т. е. стороны такого треугольника пропорціональны; поэтому говорятъ: *стороны подобныхъ треугольниковъ пропорціональны.*

§ 93. Треугольники подобны при слѣдующихъ условіяхъ:

Теорема 1. *Треугольники подобны, если всѣ стороны ихъ пропорціональны.*

Пусть въ $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ дано: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Требуется доказать, что $\angle A = \angle A'$; $\angle B = \angle B'$ и $\angle C = \angle C'$.

Доказ. Отложимъ $AD = A'B'$ и проведемъ $DG \parallel BC$; то (§ 87) получимъ:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AG} = \frac{BC}{DG}.$$

Сравнивая эти двѣ пропорціи съ двумя данными, найдемъ,

что $AG = A'C'$ и $DG = B'C'$; слѣдов. $\triangle ADG = \triangle A'B'C'$ (§ 53, теор. 1). Но такъ какъ сотвѣтственные углы $\triangle ADG$ и $\triangle ABC$ равны (§ 43, теор. 6), то и углы данныхъ треугольниковъ тоже равны, т. е. $\angle A = \angle A'$; $\angle B = \angle B'$ и $\angle C = \angle C'$.

Теорема 2. *Треугольники подобны, если имѣютъ по двѣ пропорціональныя стороны и по равному углу, лежащему между ними.*

Пусть дано $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ и $\angle A = \angle A'$. Требуется доказать, что $\angle C = \angle C'$ и $\angle B = \angle B'$.

Доказ. Если отложимъ $AD = A'B'$ и проведемъ $DG \parallel BC$, то (§ 85, теор. 1) имѣемъ:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AG}.$$

Сравнивая эту пропорцію съ данной, получимъ $AG = A'C'$, и слѣдов. $\triangle ADG = \triangle A'B'C'$ (§ 53, теор. 2), значитъ и соотвѣтственные углы этихъ треугольниковъ равны. Но такъ какъ $DG \parallel BC$, то углы $\triangle ABC$ и $\triangle ADG$ равны, а слѣдов. и углы данныхъ треугольниковъ тоже равны, т. е. $\angle A = \angle A'$; $\angle B = \angle B'$ и $\angle C = \angle C'$.

Слѣдствіе. *Прямоугольные треугольники подобны, если катеты пропорціональны.*

Теорема 3. *Треугольники подобны, если имѣютъ по двѣ пропорціональныя стороны и по равному углу, лежащему противъ той изъ двухъ сторонъ, которая больше или равна другой.*

Пусть дано $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, $\angle C = \angle C'$ и притомъ AB или больше или равно AC. Требуется доказать, что $\triangle ABC \infty \triangle A'B'C'$.

Доказ. Отложимъ $AD = A'B'$ и проведемъ $DG \parallel BC$, тогда (§ 85, теор. 1) имѣемъ:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AG}.$$

Сравнивая эту пропорцію съ данной, заключимъ, что $AG = A'C'$ и слѣдов. $\triangle ADG = \triangle A'B'C'$, такъ какъ эти треугольники имѣютъ по двѣ равныя стороны $AD = A'B'$ и $AG = A'C'$ и по равному углу $\angle G = \angle C = \angle C'$, лежащему противъ $A'B'$, которая по условію не менѣе $A'C'$ (§ 53, теор. 3). Но углы $\triangle ABC$ равны угламъ $\triangle ADG$, значитъ и углы данныхъ треугольниковъ тоже равны, т. е. $\triangle ABC \infty \triangle A'B'C'$.

Замѣчаніе. Если треугольники (чер. 177) имѣютъ по двѣ пропорціональныя стороны и по равному углу, лежащему противъ меньшей стороны, то они не будутъ подобны между собою только въ томъ случаѣ, если одинъ изъ нихъ остроугольный, а другой тупоугольный, потому что если AB<BC, то $\triangle BDG$ и $\triangle A'B'C'$ не равны между собою (§ 53, замѣч., теор. 3).

Чер. 177.

Слѣдствіе. *Прямоугольные треугольники подобны, если они имѣютъ гипотенузу и одинъ изъ катетовъ пропорціональными.*

Теорема 4. *Треугольники подобны, если два угла одного порознь равны двумъ угламъ другаго.*

Потому что третьи углы этихъ треугольниковъ, какъ дополненія до двухъ прямыхъ, тоже равны (§ 50), а потому треугольники подобны.

Слѣдствіе 1. *Треугольники подобны, если стороны одного порознь параллельны (или порознь перпендикулярны) сторонамъ другаго.*

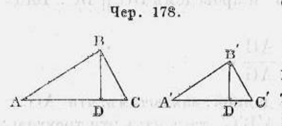
Потому что, разсуждая подобно тому, какъ въ случаѣ равенства треугольниковъ § 53 теор. 4, слѣд. 1, докажемъ, что такіе треугольники необходимо имѣютъ по два равныхъ угла.

Слѣдствіе 2. *Прямоугольные треугольники подобны, если острый уголъ одного равенъ острому углу другаго.*

Слѣдствіе 3. *Въ подобныхъ треугольникахъ высоты, опущенныя изъ вершинъ равныхъ угловъ, пропорціональны сходственнымъ сторонамъ.*

Такъ если $\triangle ABC \infty \triangle A'B'C'$ (чер. 178), то отношенія высотъ:

Чер. 178.



$$\frac{BD}{B'D'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'},$$

потому что прямоугольные треугольники ABD и A'B'D', BDC и B'D'C' подобны (слѣд. 2).

Задача. *На данной прямой AB построить треугольникъ, подобный данному треугольнику A'B'C'.*

Рѣш. Откладывая на данной прямой при концахъ ея A и B углы A' и B', получимъ искомый треугольникъ ABC.

§ 94. Изъ всего сказаннаго о подобіи треугольниковъ слѣдуетъ, что два треугольника ABC и A'B'C' подобны, если даны два изъ пяти соотношеній:

$$A=A';\ B=B';\ C=C';\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

Исключеніе представляетъ только одинъ случай, а именно, когда треугольники имѣютъ по двѣ пропорціональныя стороны и по равному углу, лежащему противъ меньшей изъ нихъ, и притомъ одинъ треугольникъ остроугольный, другой тупоугольный (§ 93, теор. 3, замѣч.). Но и въ этомъ случаѣ, если оба треугольника одного рода, т. е. оба прямоугольные, или оба тупоугольные, или оба остроугольные, то они подобны. Вслѣдствіи этого всѣ условія подобія треугольниковъ можно выразить въ одномъ предложеніи:

Треугольники подобны, если они одного рода и если существуютъ два изъ пяти слѣдующихъ условій:

$$A=A';\ B=B';\ C=C';\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

Замѣчаніе. Сравнивая условія подобія треугольниковъ съ условіями равенства, легко видѣть, что послѣднія составляютъ частный случай первыхъ. Причемъ къ каждымъ двумъ условіямъ подобія должно прибавить для полученія условій равенства еще одно условіе, выражающее, что отношеніе двухъ какихъ нибудь сторонъ равно единицѣ, т. е. что треугольники имѣютъ еще по одной равной сторонѣ. Т. об. подобіе выражается двумя условіями, а равенство тремя.

Подобіе многоугольниковъ.

§ 95. Пусть данъ многоугольникъ ABCDE (чер. 179). Изъ вершины какого-нибудь угла A проведемъ діагонали и чрезъ какую-нибудь точку E_1 прямой AE проведемъ прямую $E_1D_1 \parallel ED$; чрезъ точку пересѣченія D_1 прямой E_1D_1 съ діагональю AD проведемъ прямую $D_1C_1 \parallel DC$, и наконецъ чрезъ точку пересѣченія C_1 прямой C_1D_1 съ діагональю AC проведемъ прямую $B_1C_1 \parallel BC$ до встрѣчи съ прямою AB. Такимъ образомъ составится многоугольникъ $AB_1C_1D_1E_1$, углы котораго соотвѣтственно равны угламъ даннаго многоугольника (§ 43,

Чер. 179.

теор. 6). Изъ подобія треугольниковъ ABC и AB_1C_1 имѣемъ, что

$$\frac{AB}{AB_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{AC_1}.$$

Изъ подобія треугольниковъ ACD и AC_1D_1 имѣемъ, что

$$\frac{AC}{AC_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{AD}{AD_1}$$

и, наконецъ, изъ подобія треугольниковъ ADE и AD_1E_1 имѣемъ, что

$$\frac{AD}{AD_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{AE}{AE_1}.$$

Сравнивъ эти три ряда пропорцій, получимъ:

$$\frac{AB}{AB_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{AE}{AE_1}.$$

Многоугольники называются *подобными, когда ихъ углы порознь равны и сходственныя стороны пропорціональны.*

§ 96. **Теорема 1**. *Діагонали, проведенныя изъ соотвѣтственныхъ угловъ подобныхъ многоугольниковъ, раздѣляютъ ихъ на одинаковое число подобныхъ и сходственно-расположенныхъ треугольниковъ.*

Дано, что $ABCDE \sim abcde$ (чер. 180) и изъ соотвѣтственныхъ угловъ A и *a* проведены діагонали. Требуется доказать, что $\triangle ABC \sim \triangle abc$; $\triangle ACD = \triangle acd$ и $\triangle ADE \sim \triangle ade$.

Доказ. Изъ подобія данныхъ многоугольниковъ слѣдуетъ, что $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}$ и $\angle B=\angle b$, а потому $\triangle ABC \sim \triangle abc$ (§ 93, теор. 2). Изъ подобія послѣднихъ треугольниковъ имѣемъ, что $\frac{BC}{bc}=\frac{AC}{ac}$ и $\angle BCA=\angle bca$, а изъ подобія многоугольниковъ имѣемъ $\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}$ и $\angle BCD=\angle bcd$, отсюда слѣдуетъ, что $\frac{AC}{ac}=\frac{CD}{cd}$ и $\angle ACD=\angle acd$, а потому $\triangle ACD \sim \triangle acd$ (§ 93, теор. 2).

Чер. 180.

Продолжая такимъ образомъ разсуждать далѣе, докажемъ подобіе остальныхъ треугольниковъ, сколько-бы ихъ ни было.

Теорема 2, *обр. Многоугольники подобны, если они раздѣляются діагоналями, проведенными изъ вершинъ двухъ соотвѣтствующихъ угловъ, на одинаковое число подобныхъ и сходственно-расположенныхъ треугольниковъ.*

Дано, что ABCDE и *abcde* дѣлятся діагоналями, проведенными изъ вершинъ угловъ A и *a*, на подобные и одинаково расположенные треугольники, т. е. $\triangle ABC \sim \triangle abc$, $\triangle ACD \sim \triangle acd$ и $\triangle ADE \sim \triangle ade$. Требуется доказать, что $ABCDE \sim abcde$, т. е. что въ этихъ многоугольникахъ углы порознь равны и сходственныя стороны пропорціональны.

Доказ. Углы этихъ многоугольниковъ равны, потому что они составлены изъ равныхъ угловъ одинаково расположенныхъ подобныхъ треугольниковъ. Напр. $\angle C=\angle c$, потому что изъ подобія треугольниковъ ABC и *abc* слѣдуетъ равенство угловъ BCA и *bca*, а изъ подобія треугольниковъ ACD и *acd* слѣдуетъ равенство угловъ ACD и *acd*.

По условію $\triangle ABC \sim \triangle abc$, откуда

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{AC}{ac};$$

$\triangle ACD \sim \triangle acd$, откуда

$$\frac{AC}{ac}=\frac{CD}{cd}=\frac{AD}{ad};$$

и, наконецъ, $\triangle ADE \sim \triangle ade$, откуда

$$\frac{AD}{ad}=\frac{CD}{cd}=\frac{EA}{ea}.$$

Сравнивая эти три ряда пропорцій, получимъ:

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\frac{DE}{de}=\frac{EA}{ea}$$

т. е. стороны данныхъ многоугольниковъ пропорціональны.

Задача. *На данной прямой AB построить многоугольникъ, подобный данному abcde.*

Рѣш. На данной прямой AB построимъ $\triangle ABC$, подобный $\triangle abc$. Затѣмъ, на AC построимъ $\triangle ACD$, подобный $\triangle acd$ и т. д. Такимъ образомъ получимъ многоугольникъ ABCDE, подобный по теоремѣ данному многоугольнику *abcde*.

§ 97. **Теорема**. *Периметры подобныхъ многоугольниковъ относятся какъ сходственныя стороны.*

Дано, что $ABCDE \sim abcde$ (чер. 180). Требуется доказать, что

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{ab+bc+cd+de+ea}=\frac{AB}{ab}.$$

Доказ. По опредѣленію подобія многоугольниковъ имѣемъ, что

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\frac{DE}{de}=\frac{EA}{ea}.$$

Но въ рядѣ равныхъ отношеній сумма предыдущихъ членовъ относится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ одинъ предыдущій къ своему послѣдующему, а потому

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{ab+bc+cd+de+ea}=\frac{AB}{ab}.$$

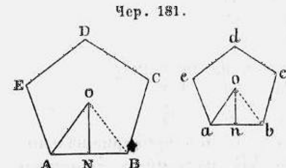
§ 98. Изъ опредѣленія подобія многоугольниковъ слѣдуетъ что всѣ правильные многоугольники одноименные, т. е. съ одинаковымъ числомъ сторонъ, подобны, потому что всѣ углы ихъ равны между собою (§ 65) и отношенія сторонъ равны.

Теорема. *Периметры правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ относятся между собою какъ ихъ апоѳемы или какъ разстоянія вершинъ отъ центровъ этихъ многоугольниковъ.*

Даны правильные многоугольники ABCDE и $abcde$ (чер. 181).

Пусть будутъ O и o центры, ON и on—апоѳемы. Означая чрезъ P и p длины периметровъ этихъ многоугольниковъ, докажемъ, что $\frac{P}{p}=\frac{ON}{on}=\frac{AO}{ao}$.

Чер. 181.



Доказ. Такъ какъ AO и BO, а также ao и bo, суть равнодѣлящія равныхъ угловъ данныхъ многоугольниковъ (§ 65, теор. 1), то въ треугольникахъ AOB и aob углы при основаніяхъ AB и ab равны между собою, а потому

$\triangle AOB \backsim \triangle aob$ (§ 93, теор 4). Слѣдовательно $\frac{AB}{ab}=\frac{ON}{on}=\frac{AO}{ao}$ (§ 93, теор. 4, слѣд. 3) и по § 97 имѣемъ, что $\frac{P}{p}=\frac{AB}{ab}$, а потому $\frac{P}{p}=\frac{ON}{on}=\frac{AO}{ao}$.

Площади прямолинейныхъ фигуръ.

§ 99. Всякая геометрическая фигура занимаетъ опредѣленную часть плоскости, на которой помѣщается. Величина

такой части плоскости называется площадью фигуры и слѣд. *площадью геометрической фигуры называется величина части плоскости, заключающейся между линіями, которыя ограничиваютъ фигуру.*

Измѣрить площадь фигуры значитъ сравнить эту площадь съ какой-нибудь извѣстной площадью, принимаемой за единицу мѣры площадей, и узнать изъ сколькихъ единицъ или частей единицы состоитъ данная площадь. За единицу мѣры площадей принимаютъ квадратъ, сторона котораго равна линейной единицѣ. Такую единицу называютъ *квадратною единицею.* Напр. квадратный аршинъ есть квадратъ, сторона котораго равняется аршину. Так. обр. величина части плоскости, занимаемой всякой фигурой, выражается числомъ, которое показываетъ, сколько въ данной площади заключается квадратныхъ единицъ, или частей этой единицы. Напр. если говорятъ: площадь пола равна 176 квадратнымъ аршинамъ, то это значитъ, что въ ней заключается 176 квадратовъ, имѣющихъ сторону въ одинъ аршинъ.

Число, показывающее сколько въ данной площади заключается квадратныхъ единицъ, или частей такой единицы, опредѣляетъ данную площадь и есть *мѣра площади.*

Отношеніемъ одной площади къ другой, напр. площади прямоугольника ABCD (чер. 182) къ площади $abcd$, называется цѣлое или дробное число, показывающее сколько разъ въ первой площади заключается вторая или какая-нибудь часть второй; такое отношеніе обозначаютъ такъ

$$\frac{ABCD}{abcd} \text{ или } \frac{AC}{ac}.$$

Чер. 182.

Изъ этого слѣдуетъ, что *мѣра площади есть отношеніе этой площади къ площади квадрата, принятаго за единицу мѣры.*

Двѣ фигуры называются равными, если совмѣщаются при наложеніи другъ на друга; понятно, что и площади такихъ фигуръ тоже равны и имѣютъ одинаковую мѣру. Т. обр. *равныя фигуры равномѣрны.*

§ 100. Измѣреніе площадей прямолинейныхъ фигуръ основано на слѣдующихъ теоремахъ:

Теорема 1. *Отношеніе площадей двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія и разныя высоты, равно отношенію ихъ высотъ.*

Пусть даны два прямоугольника AC и ac (чер. 183), основанія которыхъ $AB=ab$. Требуется доказать, что

$$\frac{AC}{ac}=\frac{AD}{ad}.$$

Чер. 183.

Доказ. Высоты AD и ad могутъ быть соизмѣримы и несоизмѣримы; разсмотримъ каждый изъ этихъ двухъ случаевъ отдѣльно.

1-й случай. Высоты AD и ad имѣютъ общую мѣру AJ, и пусть эта общая мѣра укладывается въ AD—m разъ и въ ad—n разъ, то (§ 83)

$$\frac{AD}{ad}=\frac{m}{n} \quad (1).$$

Если чрезъ точки дѣленій высотъ AD и ad проведемъ прямыя параллельныя основаніямъ прямоугольниковъ, то раздѣлимъ этими параллельными AC на m, а ac на n прямоугольниковъ. Всѣ эти $m+n$ прямоугольниковъ имѣютъ высоты равныя AJ и равныя между собою основанія, такъ какъ отрѣзки параллельныхъ между параллельными равны (§ 58, теор. 1) и основанія данныхъ прямоугольниковъ по условію тоже равны, а потому легко доказать, что всѣ $m+n$ прямоугольниковъ равны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какіе-нибудь два изъ нихъ, напр. PR и pr, и наложимъ первый на второй такъ, чтобы основаніе PS совмѣстилось съ равнымъ ему основаніемъ ps, то, по равенству прямыхъ угловъ, PQ пойдетъ по pq и SR по sr, причемъ, вслѣдствіи равенства высотъ, точка Q упадетъ въ q и R въ r; значитъ QR совмѣстится съ qr и слѣдов. прямоугольники совмѣстятся, а потому они равны. На основаніи этого имѣемъ:

$$AC=m.\ PR \text{ и } ac=n.\ PR;$$

откуда $$\frac{AC}{ac}=\frac{m}{n} \quad (2).$$

Сравнивая (1) со (2), получимъ (акс. 1):

$$\frac{AC}{ac}=\frac{AD}{ad}.$$

2-й случай. Высоты AD и ad (чер. 184) несоизмѣримы; докажемъ, что и въ этомъ случаѣ отношеніе площадей, т. е. $\frac{AC}{ac}$ не можетъ быть ни болѣе ни менѣе отношенія соотвѣт-

ствующихъ высотъ, т. е. $\frac{AD}{ad}$. Въ самомъ дѣлѣ положимъ, что

$$\frac{AC}{ac}>\frac{AD}{ad}.$$

Чер. 184.

Чтобы первое изъ этихъ отношеній сдѣлать равнымъ второму, увеличимъ второе отношеніе, взявъ вмѣсто AD другую прямую AX большую AP и притомъ такую, чтобы было

$$\frac{AC}{ac}=\frac{AX}{ad} \quad (1).$$

Раздѣлимъ высоту ad на столько равныхъ между собою частей, чтобы каждая часть была менѣе DX и будемъ эту часть откладывать отъ точки A на прямой AX, тогда по крайней мѣрѣ одно изъ этихъ дѣленій упадетъ между точками D и X, напр. въ точку Y. Чрезъ эту точку Y проведемъ прямую YV || AB, то получится новый прямоугольникъ ABVY, высота котораго AY соизмѣрима съ высотою ad прямоугольника $abcd$ (потому что AY и ad имѣютъ общую мѣру); слѣдов., по 1-му случаю, имѣемъ: $$\frac{AV}{ac}=\frac{AY}{ad} \quad (2).$$

Раздѣливъ (1) на (2), получимъ:

$$\frac{AC}{AV}=\frac{AX}{AY},$$

что невозможно, потому что первое отношеніе $\frac{AC}{AV}<1$, такъ какъ $AC<AV$; а второе отношеніе $\frac{AX}{AY}>1$, такъ какъ $AX>AY$. Изъ этого видно, что невозможно допустить, чтобы отношеніе $\frac{AC}{ac}$ было болѣе $\frac{AD}{ad}$. Подобнымъ же образомъ докажемъ, что невозможно допустить, чтобы $\frac{AC}{ac}$ было менѣе $\frac{AD}{ad}$. Если же $\frac{AC}{ac}$ не можетъ быть ни болѣе и ни менѣе $\frac{AD}{ad}$, то (акс. 9)

$$\frac{AC}{ac}=\frac{AD}{ad},$$

что и требовалось доказать.

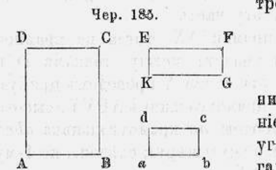
Слѣдствіе 1. Такъ какъ за основаніе прямоугольника можно принять всякую его сторону, то можно сказать, что *отношеніе площадей двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя высоты и разныя основанія, равно отношенію ихъ основаній.*

Слѣдствіе 2. *Если въ прямоугольникѣ одна сторона постоянна, а другая, прилежащая первой, измѣняется, то площадь прямоугольника пропорціональна измѣняющейся сторонѣ.*

Теорема 2. *Отношеніе площадей двухъ прямоугольниковъ съ какими угодно основаніями и высотами равно произведенію отношенія ихъ основаній на отношеніе ихъ высотъ.*

Пусть даны два прямоугольника ABCD и $abcd$ (чер. 185); требуется доказать, что

Чер. 185.



$$\frac{AC}{ac}=\frac{AB}{ab}\cdot\frac{AD}{ad}.$$

Доказ. Построимъ прямоугольникъ KGFE, у котораго основаніе равно основанію одного прямоугольника AC и высота высотѣ другаго ac; т. е. KG=AB и KE=ad.

Прямоугольники AC и KF имѣютъ равныя основанія, и, по теор. 1, имѣемъ:

$$\frac{AC}{KF}=\frac{AD}{KE},$$ или такъ какъ KE=ad,

$$\frac{AC}{KF}=\frac{AD}{ad} \qquad (1).$$

Прямоугольники KF и ac имѣютъ равныя высоты и слѣд., по 1 теор., имѣемъ: $\frac{KF}{ac}=\frac{KG}{ab}$, или такъ какъ KG=AB,

$$\frac{KF}{ac}=\frac{AB}{ab} \qquad (2).$$

Помножая (1) на (2) и сокращая KF, получимъ:

$$\frac{AC}{ac}=\frac{AB}{ab}\cdot\frac{AD}{ad}.$$

Теорема 3. *Площадь прямоугольника измѣряется произведеніемъ длины его основанія на длину его высоты, причемъ за единицу площади принятъ квадратъ, сторона котораго есть единица длины.*

Пусть данъ квадратъ (чер. 186), принятый за единицу мѣры площадей, сторона котораго ab=ad есть единица длины, и пусть данъ какой нибудь прямоугольникъ ABCD, основаніе котораго AB имѣетъ длину a; а высота AD длину h. Означимъ чрезъ s мѣру площади этого прямоугольника и докажемъ, что

$$s=a\,.\,h.$$

Чер. 186.

Доказ. По теоремѣ 2-й имѣемъ:

$$\frac{\text{пл. } ABCD}{\text{пл. } abcd}=\frac{AB}{ab}\cdot\frac{AD}{ad}=\frac{AB}{ab}\cdot\frac{AD}{ab}.$$

Въ этомъ равенствѣ отношеніе площадей $\frac{ABCD}{abcd}$ равно числу, измѣряющему площадь ABCD квадратомъ $abcd$ (§ 99), т. е. равно s; а отношенія $\frac{AB}{ab}$ и $\frac{AD}{ab}$ равны числамъ, выражающимъ соотвѣтственно результатъ измѣренія основанія AB и высоты AD единицею мѣры ab (§ 83), и слѣдов. $\frac{AB}{ab}$ есть длина основанія AB прямоугольника, т. е. a; а $\frac{AD}{ab}$ длина высоты AD, т. е. h. Поэтому имѣемъ:

$$s=a\,.\,h,$$

Замѣчаніе. Обыкновенно эту теор. выражаютъ сокращенно, хотя и не точно, такъ: *площадь прямоугольника равна произведенію его основанія на высоту.*

Слѣдствіе. *Площадь квадрата измѣряется второй степенью длины его стороны.* Такъ если длина стороны квадрата есть a, то мѣра его площади будетъ a^2.

§ 101. **Теорема.** *Площадь всякаго треугольника измѣряется половиною произведенія длины его основанія на длину высоты.*

Означимъ чрезъ s мѣру площади треугольника; чрезъ a длину его основанія и чрезъ h—длину высоты. Требуется доказать, что

$$s=\frac{a\,.\,h}{2}.$$

Доказ. Одинъ изъ двухъ угловъ, прилежащихъ сторонѣ, принятой за основаніе, можетъ быть прямой, а другой острый,

или оба острые, или одинъ тупой, другой острый; разсмотримъ каждый изъ этихъ 3-хъ случаевъ отдѣльно:

1-й случай. Въ $\triangle ABC$ (чер. 187), уголъ A прямой; основаніе $AB=a$; высота $CA=h$ совпадаетъ со стороною. Проведемъ чрезъ точки C и B прямыя $CD \parallel AB$ и $BD \parallel AC$, то получится прямоугольникъ ABDC, который равенъ двойному треугольнику ABC, потому что діагональ BC дѣлитъ параллелограмъ на два равныхъ треугольника. По § 100 теор. 3 мѣра площади прямоугольника ABCD есть $2s=a.h$, откуда

Чер. 187.

$$s=\frac{a.h}{2}.$$

2-й случай. Въ $\triangle ABC$ (чер. 188), углы A и B острые; основаніе $AB=a$; высота $CK=h$.

Чер. 188.

$$\triangle ABC=\triangle ACK+\triangle BCK.$$

По 1-му случаю мѣра площади $\triangle ACK=\frac{AK.CK}{2}$; а мѣра площади $\triangle BCK=\frac{BK.CK}{2}$. Слѣд. мѣра площади

$$\triangle ABC=\frac{AK.CK+BK.CK}{2}=\frac{(AK+BK)CK}{2}=\frac{AB.CK}{2}$$

или

$$s=\frac{a.h}{2}.$$

3-й случай. Въ $\triangle ABC$ (чер. 189) уголъ A тупой; основаніе $AB=a$; высота $CK=h$.

Чер 189.

$$\triangle ABC=\triangle KBC-\triangle KAC.$$

По 1-му случаю мѣра площади $\triangle KBC=\frac{KB.CK}{2}$, а мѣра площади $\triangle KAC=\frac{KA.CK}{2}$. Слѣдов. мѣра площади

$$\triangle ABC=\frac{KB.CK-KA.CK}{2}=\frac{(KB-KA)CK}{2}=\frac{AB.CK}{2}$$

или

$$s=\frac{a.h}{2}.$$

Слѣдствіе 1. *Мѣра площади прямоугольнаго треугольника есть половина произведенія длинъ его катетовъ.*

Слѣдствіе 2. *Отношеніе площадей двухъ треугольниковъ равно произведенію отношенія ихъ основаній на отношеніе высотъ.*

Слѣдствіе 3. *Если въ треугольникѣ основаніе постоянно, а высота измѣняется, то площадь треугольника пропорціональна высотѣ. Еслиже высота постоянна, а основаніе измѣняется, то площадь пропорціональна основанію.*

Слѣдствіе 4. *Всѣ треугольники съ равными основаніями и высотами равномѣрны.*

§ 102. Всякая прямолинейная фигура можетъ быть раздѣлена прямыми линіями, напр. діагоналями, на треугольники, слѣдов. мѣра площади всякой прямолинейной фигуры равняется суммѣ мѣръ такихъ треугольниковъ. По § 101 мѣра площади каждаго треугольника можетъ быть найдена, и т. обр. всякая прямолинейная фигура можетъ быть измѣрена. Примѣнимъ этотъ способъ къ выводу употребительныхъ выраженій мѣры площади параллелограмма, трапеціи и всякаго правильнаго многоугольника.

Теорема 1. *Площадь всякаго параллелограмма измѣряется произведеніемъ длины его основанія на длину высоты.*

Пусть въ параллелограммѣ ABCD (чер. 190) основаніе $AB=a$ и высота $DK=h$; s— мѣра площади его. Требуется доказать, что $s=a.h$.

Чер. 190.

Доказ. Проведемъ діагональ DB (§ 58, теор. 4), то

пл. $ABCD=$ пл. $\triangle ABD+$ пл. $\triangle DBC$.

Но такъ какъ $\triangle ABD=\triangle DBC$, то

пл. $ABCD=2.$ пл. $\triangle ABD$.

Но, по § 101, мѣра площ. $\triangle ABD=\frac{a.h}{2}$

слѣдов. $$s=\frac{2.a.h}{2}=a.h.$$

Слѣдствіе 1. *Всѣ параллелограммы съ равными основаніями и равными высотами равномѣрны.*

Слѣдствіе 2. *Если въ параллелограммѣ основаніе постоянно, а высота измѣняется, то площадь его пропорціональ-*

на высоту. Если же высота постоянна, а основаніе измѣняется, то площадь пропорціональна основанію.

Теорема 2. *Площадь трапеціи измѣряется произведеніемъ полусуммы длинъ ея параллельныхъ сторонъ на разстояніе между ними.*

Пусть ABCD (чер. 191) трапеція; $AB=a$; $DC=b$ и $DK=h$;

Чер. 191.

требуется доказать, что $S=\frac{(a+b)\,h}{2}$

Доказ. Проведя діагональ DB, получимъ

пл. ABCD = пл. $\triangle$ ABD + пл. $\triangle$ DBC.

Но мѣра пл. $\triangle ABD=\frac{AB\,.\,DK}{2}=\frac{ah}{2}$,

мѣра пл. $\triangle DBC=\frac{DC\,.\,BE}{2}=\frac{b\,.\,h}{2}$, слѣдовательно

$$S=\frac{ah}{2}+\frac{bh}{2}=\frac{(a+b)\,h}{2}.$$

Слѣдствіе. *Площадь трапеціи измѣряется произведеніемъ длины высоты на длину прямой, соединяющей средины непараллельныхъ сторонъ.* Потому что въ трапеціи $\frac{AB+DC}{2}=IK$ (§ 57, теор. 3).

Теорема 3. *Площадь всякаго правильнаго многоугольника измѣряется произведеніемъ длины его периметра на половину длины апоѳемы.*

Пусть данъ правильный многоугольникъ ABCDEF (чер. 192).

Чер. 192

Чрезъ s, p и a означимъ соотвѣтственно мѣру его площади, длину периметра и длину апоѳемы OK; докажемъ, что $s=p.\frac{a}{2}$.

Доказ. Соединивъ центръ O съ вершинами, получимъ равные треугольники. Мѣра площади каждаго есть произведеніе длины стороны на половину длины апоѳемы, и слѣд.

$$s=p.\frac{a}{2}.$$

§ 103. **Задача 1.** *Опредѣлить мѣру площади треугольника, когда дана длина каждой изъ трехъ сторонъ его.*

Рѣш. Пусть будетъ длина сторонъ $\triangle ABC$ — a, b и c (чер. 193); мѣра его площади s; тогда $s=\frac{c.CK}{2}$ (§ 101); $CK=\sqrt{b^2-AK^2}$ (§ 89, теор. I, слѣд. 2); $a^2=b^2+c^2-2c.AK$ (§ 90), откуда

Чер. 193.

$$AK=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c};\ \text{а потому}$$

$$CK=\frac{\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}}{2c},$$

слѣдовательно $s={}^1/_4\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}=$

$$={}^1/_4\sqrt{(2bc+b^2+c^2-a^2)\,(2bc-b^2-c^2+a^2)}=$$

$$={}^1/_4\sqrt{[(b+c)^2-a^2]\,[a^2-(b-c)^2]}=$$

$$={}^1/_4\sqrt{(b+c+a)\,(b+c-a)\,(a+b-c)\,(a-b+c)}.$$

Полагая $a+b+c=2p$, получимъ:

$$s=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Задача 2. *По данной сторонѣ равносторонняго треугольника найти мѣру его площади.*

Полагая $a=b=c$, найдемъ, что $p={}^3/_2a$; слѣдов.

$$s=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Это выраженіе можно прямо найти по § 101.

Задача 3. *Данный многоугольникъ превратить въ равномѣрный ему треугольникъ.*

Рѣш. Пусть данъ, напр. пятиугольникъ ABCDE (чер. 194).

Чер. 194.

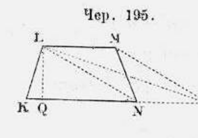
Проведя діагональ BD, отдѣлимъ треугольникъ BCD. Проведя затѣмъ чрезъ вершину C прямую CC′ ∥ BD, замѣтимъ, что всѣ треугольники, имѣющіе основаніемъ BD и вершина которыхъ на прямой CC′, равномѣрны треугольнику BCD (§ 101, слѣд. 4) и каждый изъ нихъ составитъ съ четыреугольникомъ ABDE многоугольникъ равномѣрный данному пятиугольнику. Для того, чтобы новый многоугольникъ имѣлъ одною вершиною менѣе даннаго, должно изъ всѣхъ упомянутыхъ треугольниковъ выбрать тотъ, котораго вершина въ C′—точкѣ встрѣчи параллельной съ про-

долженной стороной ED. Такое построеніе дастъ возможность преобразовать какой-нибудь многоугольникъ въ другой, равномѣрный ему, но имѣющій одной стороной менѣе даннаго. Повторяя нѣсколько разъ такое построеніе, всегда дойдемъ до треугольника, равномѣрнаго данному многоугольнику.

Замѣчаніе. На основаніи этой задачи можно опредѣлить мѣру площади всякаго многоугольника, преобразовавъ его въ равномѣрный треугольникъ и вычисляя мѣру площади послѣдняго.

Пусть напр. дана трапеція (чер. 195) KLMN. Проведемъ діагональ LN и параллельно ей прямую MP до встрѣчи съ продолженнымъ основаніемъ KN. Тогда △KLP равномѣренъ трапеціи KLMN, съ которой имѣетъ общую высоту LQ. Основаніе же KP треугольника равно суммѣ параллельныхъ сторонъ трапеціи. Это приводитъ насъ къ теор. 2 § 102.

Чер. 195.



Задача 4. *Построить квадратъ, равномѣрный данному многоугольнику.*

Рѣш. Преобразуемъ данный многоугольникъ въ равномѣрный ему треугольникъ (зад. 3) и означимъ чрезъ a и h—длину основанія и длину высоты полученнаго треугольника, чрезъ x длину стороны искомаго квадрата, то мы должны имѣть: $\frac{ah}{2}=x^2$ (§ 101 и § 100, теор. 3, слѣд.). Изъ этого уравненія видно, что сторона искомаго квадрата есть средняя пропорціональная между половиною основанія треугольника и его высотою, и слѣдов. сторону искомаго квадрата построимъ по § 88.

Замѣчаніе. Если данный многоуг. есть параллелограммъ, трапеція или вообще многоуг., мѣра площади котораго выражается произведеніемъ длины двухъ прямыхъ, то задача рѣшится прямо по § 88.

Задача 5. *Построить треугольникъ, имѣющій данную высоту и равномѣрный данному многоугольнику.*

Рѣш. Построимъ треугольникъ равномѣрный данному многоугольнику (зад. 3) и чрезъ a и h означимъ длины основанія и высоты этого треугольника. Пусть будетъ k данная высота искомаго треугольника, и x — его основаніе. По условію мы должны имѣть $\frac{a \cdot h}{2}=\frac{x \cdot k}{2}$ (§ 101),

или $\frac{h}{k}=\frac{x}{a}$. Слѣдов. основаніе x искомаго треугольника найдется какъ четвертая пропорціональная къ тремъ прямымъ h, k и a (§ 86, зад. 4).

§ 104. **Теорема 1**. *Площади двухъ треугольниковъ, имѣющихъ по равному углу между неравными сторонами, относятся какъ произведенія чиселъ, выражающихъ длину сторонъ, между которыми лежатъ равные углы.*

Пусть даны △ABC и $\triangle A_1B_1C_1$ (чер. 196), у которыхъ $\angle A=\angle A_1$; $AB=c$; $AC=b$; $A_1B_1=c_1$; $A_1C_1=b_1$, и требуется доказать, что

$$\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } A_1B_1C_1}=\frac{b \cdot c}{b_1 \cdot c_1}.$$

Чер. 196.

Доказ. Если чрезъ h и h_1 означимъ соотвѣтственно длины высотъ BK и B_1K_1, то будемъ имѣть

$$\frac{\text{пл. } \triangle ABC}{\text{пл. } \triangle A_1B_1C_1}=\frac{b}{b_1}\cdot\frac{h}{h_1} \text{ (§ 101, слѣд. 2).}$$

Но $\triangle ABK \infty \triangle A_1B_1K_1$ (§ 93, теор. 4, слѣд. 2) и слѣдов. $\frac{BK}{B_1K_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$ (§ 92), или $\frac{h}{h_1}=\frac{c}{c_1}$. Вставляя на мѣсто $\frac{h}{h_1}$ равное ему $\frac{c}{c_1}$ (акс. 7), получимъ:

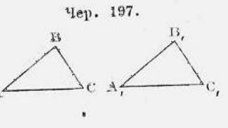
$$\frac{\text{пл. } \triangle ABC}{\text{пл. } \triangle A_1B_1C_1}=\frac{b}{b_1}\cdot\frac{c}{c_1}=\frac{b \cdot c}{b_1 \cdot c_1}.$$

Теорема 2. *Площади подобныхъ треугольниковъ относятся какъ квадраты чиселъ, выражающихъ длину сходственныхъ сторонъ.*

Пусть дано $\triangle ABC \infty \triangle A_1B_1C_1$ (чер. 197), и пусть a, b, c, a_1, b_1, c_1 будутъ длины ихъ сторонъ, лежащихъ противъ угловъ съ той же буквой; требуется доказать, что

$$\frac{\text{пл. } \triangle ABC}{\text{пл. } \triangle A_1B_1C_1}=\frac{a^2}{a_1^2}=\frac{b^2}{b_1^2}=\frac{c^2}{c_1^2}.$$

Чер. 197.



Доказ. По условію $\angle A=\angle A_1$ и слѣдов. по теор. 1-й имѣемъ:

$$\frac{\text{пл. } \triangle ABC}{\text{пл. } \triangle A_1B_1C_1}=\frac{b \cdot c}{b_1 \cdot c_1}.$$

Но $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$ (§ 92). Вставляя на мѣсто $\frac{b}{b_1}$ равное ему $\frac{c}{c_1}$ (акс. 7), получимъ:

$$\frac{\text{пл. }\triangle ABC}{\text{пл. }\triangle A_1B_1C_1}=\frac{c^2}{c_1^2}=\frac{a^2}{a_1^2}=\frac{b^2}{b_1^2}.$$

Слѣдствіе. *Во всѣхъ подобныхъ треугольникахъ мѣры площадей пропорціональны квадратамъ длины сторонъ.*

Теорема 3. *Площади подобныхъ многоугольниковъ относятся какъ квадраты чиселъ, выражающихъ длину сходственныхъ сторонъ.*

Пусть многоугольники ABCDE и A′B′C′D′E′ (чер. 198) подобны; требуется доказать, что

$$\frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } A'B'C'D'E'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}=\frac{BC^2}{B'C'^2}=\ldots$$ гдѣ AB, A′B′, BC, B′C′ означаютъ числа, выражающія длины сторонъ.

Чер. 198.

Доказ. Изъ вершинъ равныхъ угловъ A и A′ проведемъ діагонали во всѣ прочія вершины,—получимъ подобные треугольники и, на основаніи теор. 2, будемъ имѣть:

$$\text{пл. }\triangle ABC : \text{пл. }\triangle A'B'C' = AB^2 : A'B'^2$$
$$\text{пл. }\triangle ACD : \text{пл. }\triangle A'C'D' = CD^2 : C'D'^2$$
$$\text{пл. }\triangle ADE : \text{пл. }\triangle A'D'E' = DE^2 : D'E'^2$$

Но, вслѣдствіи пропорціональности сторонъ подобныхъ многоугольниковъ (§ 95), имѣемъ:

$$AB : A'B' = CD : C'D' = DE : D'E';$$ откуда
$$AB^2 : A'B'^2 = CD^2 : C'D'^2 = DE^2 : D'E'^2.$$

Слѣдов. вторыя части первыхъ трехъ равенствъ равны между собою, а потому (акс. 1)

$$\frac{\text{пл. }\triangle ABC}{\text{пл. }\triangle A'B'C'}=\frac{\text{пл. }\triangle ACD}{\text{пл. }\triangle A'C'D'}=\frac{\text{пл. }\triangle ADE}{\text{пл. }\triangle A'D'E'}.$$

Но въ рядѣ равныхъ отношеній сумма предыдущихъ членовъ относится къ суммѣ послѣдующихъ какъ одинъ предыдущій къ своему послѣдующему, т. е.

$$\frac{\text{пл. }\triangle ABC+\text{пл. }\triangle ACD+\text{пл. }\triangle ADE}{\text{пл. }\triangle A'B'C'+\text{пл. }\triangle A'C'D'+\text{пл. }\triangle A'D'E'}=$$

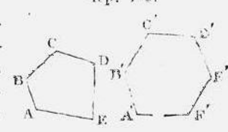
$$=\frac{\text{пл. }\triangle ABC}{\text{пл. }\triangle A'B'C'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}$$ и слѣдов.

$$\frac{\text{пл. мн. } ABCDE}{\text{пл. мн. } A'B'C'D'E'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}=\frac{BC^2}{B'C'^2}=\ldots$$

Слѣдствіе. *Во всѣхъ подобныхъ многоугольникахъ мѣры ихъ площадей пропорціональны квадратамъ длины сходственныхъ сторонъ.*

Задача 1. *Построить многоугольникъ подобный одному и равномѣрный другому данному многоугольнику.*

Пусть требуется построить многоугольникъ подобный ABCDE и равномѣрный A′B′C′D′E′F′ (чер. 199).



Чер. 199.

Рѣш. Построимъ квадраты, равномѣрные двумъ даннымъ многоугольникамъ (§ 103, зад. 4) и означимъ чрезъ a длину стороны квадрата равномѣрнаго многоуг. ABCDE и чрезъ b длину стороны квадрата, равномѣрнаго многоуг. A′B′C′D′E′F′. Мѣры площадей этихъ двухъ квадратовъ будутъ a^2 и b^2 (§ 100, теор. 3, слѣд.). Мѣра площади искомаго многоугольника будетъ тоже b^2 и такъ какъ этотъ многоугольникъ долженъ быть подобенъ многоуг. ABCDE, то, означая чрезъ x сторону его, сходственную сторонѣ AB, будемъ имѣть пропорцію: $\frac{a^2}{b^2}=\frac{AB^2}{x^2}$, или $\frac{a}{b}=\frac{AB}{x}$. Откуда x найдется какъ четвертая пропорціональная къ тремъ прямымъ (§ 86, зад. 4). На произвольной прямой отложимъ сторону равную x и на этой сторонѣ построимъ многоугольникъ подобный многоуг. ABCDE (§ 96, зад.); построенный многоуг. будетъ искомый.

Теорема 4. *Квадратъ, построенный на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, равномѣренъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на его катетахъ.*

Пусть данъ прямоугольный треугольникъ ABC (чер. 200), у котораго уголъ B—прямой; требуется доказать, что квадратъ ACDE, построенный на гипотенузѣ AC, равномѣренъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ AB и BC.

Доказ. Чрезъ точки D и E проведемъ прямыя LK и ML соотвѣтственно паралельныя катетамъ AB и BC. Эти прямыя, пересѣкаясь между собою въ точкѣ L и съ продолжен-

ными катетами въ точкахъ M и K, образуютъ четыреугольникъ BKLM, у котораго всѣ углы прямые, такъ какъ уголъ B, по условію, прямой. Въ прямоугольныхъ треугольникахъ ABC; CKD; DLE и EMA гипотенузы AC; CD; DE и EA равны между собою, какъ стороны квадрата ACDE; углы: BAC, KCD, LDE и MEA тоже равны, какъ углы съ перпендикулярными сторонами (§ 44, теор. 2), и слѣдов. эти треугольники равны (§ 53, теор. 4, слѣд. 3), а потому

Чер. 200.

$$AB=CK=DL=EM$$
$$AM=BC=DK=EL$$

складывая, получимъ:

$$AB+AM=CK+BC=DL+DK=EM+EL$$

или

$$BM=BK=KL=LM,$$

т. е. четыреугольникъ BKLM есть квадратъ. Проведемъ чрезъ точки D и E двѣ прямыя DI || BC и EV || AB. Этими прямыми квадратъ BKLM раздѣлится на четыре части, а именно: на два квадрата OVKD и OIME и на два равныхъ между собою прямоугольника OVBI и ODLE, потому что по вышесказанному EL=DK=KV а также DL=ME=MI (§ 58, теор. 1). Но прямоугольникъ ODLE=2△DLE=2△ABC, а потому сумма двухъ прямоугольниковъ

$$OVBI+ODLE=4\triangle ABC \text{ или}$$
$$OVBI+ODLE=\triangle ABC+\triangle CKD+\triangle DCE+\triangle EMA.$$

Вычитая эти равныя суммы изъ квадрата BKLM, получимъ равные остатки, т. е. получимъ: OIME+OVKD=ACDE.

Квадратъ OIME имѣетъ сторону ME, равную катету AB; квадратъ OVKD имѣетъ сторону DK, равную катету BC; слѣдов. эти два квадрата соотвѣтственно равны квадратамъ построеннымъ на катетахъ даннаго треугольника ABC, и теорема доказана.

Замѣчаніе. Эта теорема прямо слѣдуетъ изъ теоремы I § 89.

Теорема 5. *Многоугольникъ, построенный на гипотенузѣ, равномѣренъ суммѣ подобныхъ ему многоугольниковъ, построенныхъ на катетахъ, если гипотенуза и катеты представляютъ сходственныя стороны этихъ многоугольниковъ.*

Пусть данъ прямоугольный треугольникъ ABC (чер. 201), у котораго уголъ B прямой. Означимъ соотвѣтственно буквами P, Q и R мѣры площадей подобныхъ многоугольниковъ, построенныхъ на сторонахъ AB, BC и AC, принимаемыхъ за сходственныя стороны этихъ многоугольниковъ. Требуется доказать, что P+Q=R.

Чер. 201.

Доказ. Площади подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны квадратамъ ихъ сходственныхъ сторонъ, (§ 104, теор. 3) т. е. $\frac{P}{R}=\frac{AB^2}{AC^2}$ и $\frac{Q}{R}=\frac{BC^2}{AC^2}$.

Складывая, получимъ $\frac{P+Q}{R}=\frac{AB^2+BC^2}{AC^2}$.

Но $AB^2+BC^2=AC^2$, слѣдов. $\frac{P+Q}{R}=1$, откуда $P+Q=R$.

Задача 2. *Построить многоугольникъ, подобный и равномѣрный суммѣ или разности двухъ данныхъ подобныхъ многоугольниковъ* ABCDE *и* abcd (чер. 202).

Рѣш. Принимая сходственныя стороны AB и *ab* за катеты прямоугольнаго треугольника, построимъ треугольникъ (§ 53, зад. 3) и на гипотенузѣ его построимъ многоугольникъ, подобный одному изъ данныхъ. Этотъ многоугольникъ будетъ, по доказанной теоремѣ, равномѣренъ суммѣ двухъ данныхъ многоугольниковъ.

Если-же сторону AB бо́льшаго изъ данныхъ подобныхъ многоугольниковъ примемъ за гипотенузу, а сходственную сторону *ab* другаго многоугольника за катетъ, построимъ прямоугольный треугольникъ (§ 53, зад. 6); затѣмъ, на другомъ катетѣ этого треугольника построимъ многоугольникъ, подобный одному изъ данныхъ, то этотъ многоугольникъ будетъ, по доказанной теоремѣ, равномѣренъ разности многоугольниковъ ABCDE и *abcde*.

Чер. 202.

ОТДѢЛЪ VII.

Отношеніе, мѣра и пропорціональность угловъ, дугъ и прямыхъ въ окружности.

Общая мѣра угловъ и дугъ. Углы и дуги соизмѣримые и несоизмѣримые. Отношеніе угловъ и измѣреніе ихъ дугами.

§ 105. Пусть даны два угла $\angle$ ABC и $\angle$ DEF; всякій третій уголъ KLM, который укладывается безъ остатка въ каждомъ изъ двухъ данныхъ, называется общей мѣрой угловъ ABC и DEF. Т. обр., *общей мѣрой двухъ угловъ называется уголъ, укладывающійся безъ остатка* (*цѣлое число разъ*) *въ каждомъ изъ двухъ данныхъ угловъ.*

Пусть даны двѣ дуги той же или двухъ равныхъ окружностей, напр. даны дуги AC и DF; всякая третья дуга KM, которая укладывается безъ остатка въ дугахъ AC и DF, называется общей мѣрой этихъ двухъ дугъ. Т. обр. *общей мѣрой двухъ дугъ той-же или двухъ равныхъ окружностей называется всякая дуга, укладывающаяся безъ остатка въ каждой изъ двухъ данныхъ дугъ.*

Общая наибольшая мѣра двухъ угловъ или двухъ дугъ находится точно также, какъ и общая мѣра двухъ конечныхъ прямыхъ (§ 80), т. е. *откладывается меньшій уголъ на большемъ, или меньшая дуга на большей столько разъ, сколько возможно; остатокъ откладывается на меньшемъ углѣ, или на меньшей дугѣ, второй остатокъ на первомъ и т. д. каждый остатокъ откладывается на предыдущій остатокъ; если одинъ изъ остатковъ уложится безъ новаго остатка въ предыдущемъ, то онъ и будетъ общею наибольшею мѣрою.*

Два угла, или двѣ дуги, имѣющіе общую мѣру, называются *соизмѣримыми*, а не имѣющіе ея—*несоизмѣримыми*.

§ 106. Въ §§ 30 и 31 было сказано, что, принимая нѣкоторый уголъ, напр. уголъ въ одинъ градусъ, за единицу мѣры угловъ, можно всякій уголъ выразить цѣлымъ или дробнымъ числомъ точно, или на сколько угодно близко къ точности. Такое число показываетъ сколько разъ въ данномъ углѣ укладывается уголъ, или часть угла, принятаго за единицу мѣры угловъ. Точно также въ § 24 было сказано, что

принимая нѣкоторую часть окружности, напр. $\frac{1}{360}$ часть ея, т. е. дугу въ одинъ градусъ, за единицу мѣры дугъ той же окружности, можно длину всякой дуги этой окружности выразить цѣлымъ или дробнымъ числомъ точно, или насколько угодно близко къ точности. Такое число показываетъ сколько разъ въ данной дугѣ укладывается дуга, или часть дуги, принятой за единицу мѣры дугъ.

Разсуждая надъ углами и надъ дугами точно такъ, какъ надъ конечными прямыми въ § 82, придемъ къ слѣдующему заключенію: если данный уголъ соизмѣримъ съ угломъ, принятымъ за единицу мѣры угловъ, или если данная дуга соизмѣрима съ единицею мѣры дугъ, то данный уголъ, или данная дуга выразятся числомъ точно. Притомъ, число это будетъ цѣлое, если единица мѣры есть общая наибольшая мѣра, и дробное въ противномъ случаѣ; знаменатель дроби будетъ показывать сколько разъ общая мѣра укладывается въ единицѣ, а числитель въ данномъ углѣ или данной дугѣ. Если же данный уголъ несоизмѣримъ съ единицею мѣры угловъ, или если данная дуга несоизмѣрима съ единицею мѣры дугъ, то уголъ и дугу нельзя выразить числомъ точно, а только приближенно, на сколько угодно близко къ точности.

Уголъ, не имѣющій общей мѣры съ единицею мѣры угловъ, называется *несоизмѣримымъ угломъ*, и дуга, не имѣющая общей мѣры съ единицею мѣры дугъ,—*несоизмѣримой дугой*.

§ 107. *Отношеніемъ одного угла къ другому* называется число, показывающее сколько разъ въ первомъ углѣ заключается второй, или какую часть первый уголъ составляетъ отъ втораго. Отношеніе угла ABC къ углу DEF означается

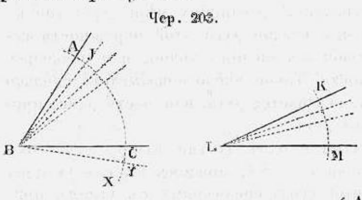
такъ: $\frac{\angle ABC}{\angle DEF}$ или такъ: $\angle ABC : \angle DEF$.

Такимъ же образомъ, *отношеніемъ одной дуги къ другой* той же или равныхъ окружностей называется число, показывающее сколько разъ въ первой дугѣ заключается вторая или какую часть первая дуга составляетъ отъ второй. Отношеніе дуги AC къ дугѣ DF обозначается такъ: $\frac{\smile AC}{\smile DF}$, или такъ: $\smile AC : \smile DF$. Точное или приближенное отношеніе двухъ

угловъ, или двухъ дугъ находится совершенно такъ, какъ и отношеніе двухъ конечныхъ прямыхъ (§ 83).

Теорема. *Отношеніе двухъ угловъ равно отношенію дугъ, описанныхъ изъ вершинъ этихъ угловъ произвольными, но равными радіусами.*

Чер. 203.



Пусть даны $\angle ABC$ и $\angle KLM$ (чер. 203) и пусть изъ вершинъ этихъ двухъ угловъ произвольнымъ, но однимъ тѣмъ же радіусомъ AB описаны дуги $\smile AC$ и $\smile KM$. Требуется доказать, что $\frac{\angle ABC}{\angle KLM} = \frac{\smile AC}{\smile KM}$.

Доказ. Дуги AC и KM могутъ быть соизмѣримы и несоизмѣримы; разсмотримъ каждый изъ этихъ двухъ случаевъ отдѣльно.

1-й случай. Дуги AC и KM имѣютъ общую мѣру AJ, и пусть эта общая мѣра укладывается въ $\smile AC - m$ разъ и въ $\smile KM - n$ разъ, такъ что $\smile AC = m. \smile AJ$ и $\smile KM = n. \smile AJ$; раздѣливъ первое равенство на второе, получимъ:

$$\frac{\smile AC}{\smile KM} = \frac{m}{n} \quad (1).$$

Если соединимъ точки дѣленій дугъ AC и KM прямыми съ вершинами угловъ, то этими прямыми $\angle ABC$ раздѣлится на m такихъ равныхъ угловъ, какихъ въ $\angle KLM$ будетъ заключаться n, потому что дуги, описанныя однимъ и тѣмъ же радіусомъ изъ вершинъ угловъ, равны, слѣдовательно и углы равны (§ 28, теор. 2). Такимъ образомъ имѣемъ: $\angle ABC = m. \angle ABJ$ и $\angle KLM = n. \angle ABJ$, откуда:

$$\frac{\angle ABC}{\angle KLM} = \frac{m}{n} \quad (2).$$

Сравнивая (1) со (2), найдемъ (акс. 1):

$$\frac{\angle ABC}{\angle KLM} = \frac{\smile AC}{\smile KM}.$$

2-й случай. Дуги AC и KM несоизмѣримы; докажемъ, что и въ этомъ случаѣ отношеніе угловъ, т. е. $\frac{\angle ABC}{\angle KLM}$ не может быть ни болѣе ни менѣе отношенія соотвѣтствующихъ имъ дугъ, т. е. отношенія $\frac{\smile AC}{\smile KM}$.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что $\frac{\angle ABC}{\angle KLM} > \frac{\smile AC}{\smile KM}$.

Чтобы сдѣлать отношеніе дугъ равнымъ отношенію угловъ, увеличимъ отношеніе дугъ и для этого возьмемъ вмѣсто дуги AC другую дугу AX большую AC и притомъ такую, чтобы было:

$$\frac{\angle ABC}{\angle KLM} = \frac{\smile AX}{\smile KM} \quad (1).$$

Раздѣлимъ $\smile KM$ на столько равныхъ между собою частей, чтобы каждая часть была менѣе CX, и будемъ эту часть откладывать отъ точки A на дугѣ AX, тогда по крайней мѣрѣ одно изъ этихъ дѣленій упадетъ между точками C и X, напр. въ точку Y. Эту точку Y соединимъ прямою YB съ вершиною угла ABC. Такъ какъ $\smile AY$ и $\smile KM$ соизмѣримы, потому что у нихъ есть общая мѣра, то, по 1-му случаю, имѣемъ:

$$\frac{\angle ABY}{\angle KLM} = \frac{\smile AY}{\smile KM} \quad (2).$$

Раздѣливъ (1) на (2), получимъ:

$$\frac{\angle ABC}{\angle ABY} = \frac{\smile AX}{\smile AY},$$

что невозможно, потому что первое отношеніе $\frac{\angle ABC}{\angle ABY} < 1$, такъ какъ $\angle ABC < \angle ABY$; а второе отношеніе $\frac{\smile AX}{\smile AY} > 1$, такъ какъ $\smile AX > \smile AY$. Изъ этого видно, что невозможно допустить, чтобы отношеніе $\frac{\angle ABC}{\angle ABK}$ было болѣе отношенія $\frac{\smile AC}{\smile KM}$. Подобнымъ же образомъ докажемъ, что невозможно допустить, чтобы $\frac{\angle ABC}{\angle KLM}$ было менѣе $\frac{\smile AC}{\smile KM}$. Если же $\frac{\angle ABC}{\angle KLM}$ не можетъ быть ни болѣе и ни менѣе $\frac{\smile AC}{\smile KM}$, то (акс. 9) $\frac{\angle ABC}{\angle KLM} = \frac{\smile AC}{\smile KM}$, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. *Въ окружности уголъ центральный пропор-*

ціоналенъ дугѣ окружности, заключенной между его сторонами, потому что съ измѣненіемъ центральнаго угла, соотвѣтствующая ему дуга окружности тоже измѣняется и притомъ такъ, что отношеніе между двумя какими-нибудь центральными углами равно отношенію между соотвѣтствующими имъ дугами.

§ 108. Если за единицу мѣры угловъ примемъ какой-нибудь уголъ, а за единицу мѣры дугъ окружности, описанной изъ вершины угла, примемъ дугу этой окружности, соотвѣтствующую центральному углу, принятому за единицу мѣры угловъ, то, на основаніи теоремы § 107, легко видѣть, что всякій уголъ выразится тѣмъ же самымъ числомъ, которымъ выразится и всякая дуга, описанная изъ его вершины какимъ угодно радіусомъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть уголъ, принятый за единицу мѣры, есть $\angle ABC$ (чер. 204), то число, которымъ выразится нѣкоторый $\angle DBC$, равно отношенію $\frac{\angle DBC}{\angle ABC}$.

Чер. 204.

По условію для измѣренія дугъ окружности радіуса BC должно принять за единицу мѣры $\smile AC$, и число, которымъ выразится $\smile DC$, равно отношенію $\frac{\smile DC}{\smile AC}$. Такимъ же образомъ за единицы мѣры дугъ окружностей радіусовъ BG и BK должно принять послѣдовательно $\smile FG$ и $\smile IK$ и числа, которыми выразятся $\smile EG$ и $\smile HK$, будутъ соотвѣтственно равны отношеніямъ $\frac{\smile EG}{\smile FG}$ и $\frac{\smile HK}{\smile IK}$. Но, по теоремѣ § 107, всѣ эти отношенія равны между собою, т. е.

$$\frac{\angle DBC}{\angle ABC} = \frac{\smile DC}{\smile AC} = \frac{\smile EG}{\smile FG} = \frac{\smile HK}{\smile IK},$$

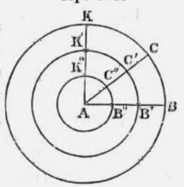
т. е. уголъ DBC и дуги DC, EG и HK выразятся тѣмъ же самымъ числомъ.

Итакъ, при принятыхъ единицахъ мѣры, *уголъ и каждая дуга, описанная изъ его вершины и заключенная между его сторонами, выражается тѣмъ же числомъ*. Это, обыкновенно, произносятъ не точно такъ: *уголъ центральный измѣряется своей дугой*, или *центральный уголъ равенъ своей дугѣ*.

Въ § 24 сказано, что за единицу мѣры дугъ обыкновенно принимаютъ $^1/_{360}$ часть всей окружности, т. е. дугу въ 1^0 и за единицу мѣры угловъ соотвѣтствующій этой дугѣ центральный уголъ, т. е. уголъ въ 1^0. Значитъ число градусовъ какого-нибудь угла равно числу градусовъ всякой дуги, описанной изъ его вершины какимъ угодно радіусомъ. Поэтому говорятъ: уголъ въ 15^0 имѣетъ дугу въ 15^0, и пишутъ безъ различія: $\angle DBC = 15^0$, или $\smile DC = 15^0$.

Изъ теоремы § 107 тоже слѣдуетъ, что если изъ вершины угла CAB (чер. 205) опишемъ разными радіусами окружности, то отношеніе дугъ CB, C'B', C''B'' къ соотвѣтствующимъ имъ окружностямъ одинаково, т. е. каждая изъ этихъ дугъ составляетъ туже самую часть своей окружности. Въ этомъ легко убѣдиться, взявъ прямой уголъ BAK и замѣтивъ, что

Чер. 205.



$$\frac{\angle BAK}{\angle BAC} = \frac{\smile BK}{\smile BC} = \frac{\smile B'K'}{\smile B'C'} = \frac{\smile B''K''}{\smile B''C''}.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что какой бы уголъ ни былъ принятъ за единицу мѣры угловъ—единицы мѣры дугъ разныхъ окружностей будутъ составлять ту же самую часть соотвѣтствующихъ имъ окружностей.

§ 109. По сказанному въ предъидущемъ § измѣреніе всякаго угла сводится къ измѣренію дуги, описанной изъ его вершины. Но на основаніи § 72, углы, составляемые разными прямыми, проведенными въ окружности, могутъ быть измѣряемы дугами этой окружности, не описанными изъ вершинъ угловъ, а именно:

1) *Вписанный уголъ измѣряется половиною дуги, заключающейся между его сторонами*, потому что онъ составляетъ половину центральнаго угла, соотвѣтствующаго той же дугѣ (§ 72, теор. 1), а центральный уголъ измѣряется своей дугою.

2) *Уголъ, составленный хордою и касательной, проведенной чрезъ конецъ хорды, измѣряется половиною дуги, стягиваемой хордою* (§ 72, теор. 2)

3) *Уголъ, съ вершиною внутри окружности, измѣряется половиною суммы дугъ, заключающихся между его сторонами и продолженіемъ этихъ сторонъ* (§ 72, теор. 3).

4) *Уголъ, съ вершиною внѣ кружности, измѣряется половиною разности дугъ, заключенныхъ между сторонами угла* (§ 72, теор. 4).

Пропорціональныя прямыя въ окружности.

§ 110. **Теорема 1.** *Хорда, соединяющая точку окружности съ концомъ діаметра, есть средняя пропорціональная между діаметромъ и проложеніемъ хорды на этотъ діаметръ* (чер. 206).

Пусть взята на окружности точка A и соединена хордою AB съ концомъ B діаметра BC, и пусть BD есть проложеніе AB на BC; требуется доказать, что $\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD}$, или, что $AB^2=BC \,.\, BD$.

Чер. 206.

Доказ. Соединяя точку A съ другимъ концомъ C діаметра, прямою AC, получимъ прямоугольный $\triangle ABC$ (§ 72, теор. 1, слѣд. 2) и, на основаніи § 88 теор. 1, имѣемъ:

$$\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD}$$

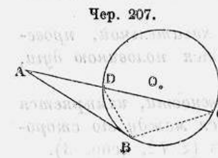
Теорема 2. *Перпендикуляръ, опущенный изъ какой нибудь точки окружности на діаметръ, есть средняя пропорціональная между отрѣзками діаметра.*

Пусть $AD \perp BC$ и требуется доказать, что $\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD}$ или что $AD^2=BD.CD$.

Доказ. Соединимъ точку A съ концами діаметра прямыми AB и AC, тогда получится прямоугольный $\triangle ABC$ (§ 72, теор. I, слѣд. 2), и, на основаніи § 88 теор. 2, имѣемъ:

$$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD}.$$

Чер. 207.



§ 111. **Теорема 1.** *Если изъ точки, взятой внѣ окружности, проведемъ касательную и сѣкущую къ окружности, то касательная будетъ средней пропорціональной между всей сѣкущей и ея внѣшней частью* (чер. 207).

Пусть изъ точки A проведена касательная AB и сѣкущая AC, внѣшняя часть которой AD. Требуется доказать, что

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD} \text{ или, что } AB^2=AC \,.\, AD.$$

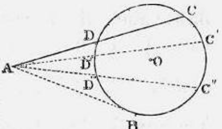
Доказ. Если соединимъ точки D и C съ точкою B прямыми DB и CB, то получимъ $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$, въ которыхъ $\angle A$ общій и $\angle ABD = \angle ACB$, потому что каждый изъ этихъ двухъ угловъ измѣряется половиною дуги BD, притомъ, $\angle ABD$, какъ составленный хордою BD и касательной AB, а $\angle ACB$, какъ вписанный (§ 109); слѣдов.

$\triangle ABC \backsim \triangle ABD$ (§ 92), а потому (§ 92, теор.)

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD}.$$

Слѣдствіе. *Произведеніе длины всей сѣкущей, проведенной изъ точки, взятой внѣ окружности, на длину ея внѣшней части, есть постоянное число*, потому что это произведеніе равно квадрату длины касательной, проведенной изъ той же точки къ окружности. Т. е. (чер. 208) $AC \,.\, AD = AC' \,.\, AD' = AC'' \,.\, AD'' = \ldots$, такъ какъ каждое изъ этихъ произведеній равно AB^2.

Чер 208.



Если съ измѣненіемъ одной конечной прямой другая (зависимая отъ нея) тоже измѣняется и притомъ такъ, что отношеніе между какими угодно двумя значеніями первой прямой равно обращенному отношенію между соотвѣтствующими значеніями второй прямой, то такія двѣ зависимыя прямыя называются обратно пропорціональными. Т. е. *двѣ прямыя называются обратно пропорціональными, если онѣ измѣняются вмѣстѣ въ обратномъ отношеніи.* Это значитъ, что съ увеличеніемъ одной конечной прямой, другая (зависимая отъ нея) во столько же разъ уменьшается, и обратно.

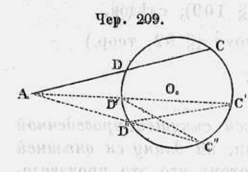
Если изъ точки A, взятой внѣ окружности, проведемъ сѣкущую AC, то внѣшняя часть AD этой сѣкущей зависима отъ всей сѣкущей, потому что если сѣкущая AC измѣнится въ AC′, то и внѣшняя часть ея AD тоже измѣнится въ AD′ и мы докажемъ слѣдующую теорему:

Теорема 2. *Сѣкущая проведенная къ окружности, изъ*

точки взятой внѣ ея, обратно пропорціональна своей внѣшней части.

Пусть изъ точки A (чер. 209) проведена сѣкущая AC къ окружности; внѣшняя часть этой сѣкущей есть AD. Требуется доказать, что AC обратно пропорціональна AD т. е. требуется доказать, что если сѣкущая AC приметъ два какихъ угодно положенія, напр. AC′ и AC″, то будетъ существовать пропорція $\frac{AC'}{AC''}=\frac{AD''}{AD'}$.

Чер. 209.



Доказ. Проведемъ прямыя D′C″ и D″C′, тогда получимъ треугольники AD′C″ и AD″C′, у которыхъ ∠A общій и ∠D′C′D″=∠D′C″D″, такъ какъ каждый изъ нихъ измѣряется половиною ∪D′D″, какъ вписанные (§ 109). Слѣдов. △AD′C″∼△AD″C′ и отношенія сходственныхъ сторонъ ихъ равны (§ 92, теор.) т. е.

$$\frac{AC'}{AC''}=\frac{AD''}{AD'}.$$

Замѣчаніе. Послѣдняя теорема прямо слѣдуетъ изъ слѣдствія теор. 1, потому что (чер. 208) изъ выраженія

$$AC'.AD'=AC''.AD''=AB^2,\ \text{имѣемъ:}\ \frac{AC'}{AC''}=\frac{AD''}{AD'}.$$

Теорема 3. *Хорда, проведенная чрезъ какую нибудь точку, взятую внутри окружности дѣлится въ этой точкѣ на двѣ обратно пропорціональныя части* (чер. 210).

Пусть чрезъ точку A проведена хорда CD и требуется доказать, что часть AC пропорціональна части AD, т. е. требуется доказать, что если хорда DC приметъ два какихъ нибудь положенія, напр. C′D′ и C″D″, то будетъ существовать пропорція:

Чер 210.

$$\frac{AC'}{AC''}=\frac{AD''}{AD'}.$$

Доказ. Проведемъ прямыя D′C″ и D″C′; тогда получимъ треугольники AD′C″ и AD″C′, у которыхъ углы при A равны, какъ вертикальные (§ 33, теор. 1) и ∠D′C′D″=∠D′C″D″, такъ какъ каждый изъ нихъ измѣряется половиною ∪D″D′, какъ вписанные (§ 109). Слѣдов. △AD′C″∼△AD″C′ и отношенія ихъ сходственныхъ сторонъ равны, т. е. $\frac{AC'}{AC''}=\frac{AD''}{AD'}$, что и треб. доказ.

Слѣдствіе. *Произведеніе длины отрѣзковъ хорды, проведенной чрезъ точку, взятую внутри окружности, есть постоянное число*, потому-что изъ пропорціи $\frac{AC'}{AC''}=\frac{AD''}{AD'}$ имѣемъ AC′.AD′=AC″.AD″ и такимъ же образомъ AC′.AD′=AC‴.AD‴=.....

§ 112. Три послѣднія теоремы предыдущаго § можно соединить въ одну слѣдующую теорему: *если изъ какой-нибудь точки проведемъ сѣкущія къ окружности, то произведеніе длины разстоянія между этою точкою и точками пересѣченія каждой сѣкущей съ окружностью, равно постоянному числу.*

§ 113. *Раздѣлить конечную прямую внутренне въ крайнемъ и среднемъ отношеніи* значитъ раздѣлить ее на такія двѣ части, чтобы большая изъ этихъ двухъ частей была средней пропорціональной между всею линіей и меньшей частью. Или это значитъ: на данной прямой AB (чер. 211) найти такую точку E, чтобы разстояніе AE этой точки отъ одного конца было среднимъ пропорціональнымъ между всею прямой AB и разстояніемъ BE точки E отъ другаго конца, т. е. чтобы было: $\frac{AB}{AE}=\frac{AE}{BE}$, или $AE^2=AB.BE$.

Раздѣлить конечную прямую внѣшне въ среднемъ и крайнемъ отношеніи значитъ найти *на продолженіи* прямой такую точку, чтобы разстояніе этой точки отъ одного конца было среднимъ пропорціональнымъ между всею прямой и разстояніемъ точки отъ другаго конца. Такъ AB будетъ раздѣлена въ точкѣ E′ внѣшне въ среднемъ и крайнемъ отношеніи, если будетъ пропорція: $\frac{AB}{AE'}=\frac{AE'}{BE'}$ или если $AE'^2=AB.BE'$.

Чер. 211.

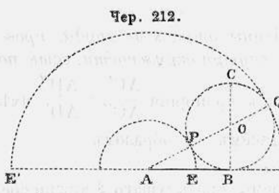
E′ ——— A ——— E ——— B

Задача. *Раздѣлить конечную прямую* AB *внутренне и внѣшне въ крайнемъ и среднемъ отношеніи* (чер. 212).

Рѣш. Изъ точки B возставимъ перпендикуляръ къ AB и

на немъ отложимъ отъ B прямую BC=AB; раздѣлимъ BC въ точкѣ O пополамъ и радіусомъ OB опишемъ окружность; проведемъ чрезъ точки A и O прямую, которая пересѣчетъ окружность въ точкахъ P и Q. Изъ точки A, какъ центра, радіусами AP и AQ опишемъ дуги, изъ которыхъ первая пересѣчетъ AB въ точкѣ E, а вторая пересѣчетъ продолженіе AB въ точкѣ E′. Въ первой изъ этихъ двухъ точекъ прямая AB будетъ раздѣлена внутренне, а во второй внѣшне въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ пропорцію:

Чер. 212.



$$\frac{AQ}{AB}=\frac{AB}{AP}\ (\S\ 111,\ \text{теор. } 1),$$

изъ которой получимъ:

$$\frac{AQ-AB}{AB}=\frac{AB-AP}{AP}\ (1)\quad \text{и}\quad \frac{AQ+AB}{AQ}=\frac{AB+AP}{AB}\ (2).$$

Такъ какъ AQ−AB=AQ−PQ=AP (потому что діаметръ окружности=AB) и AP=AE, то изъ пропорціи (1) получимъ:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{BE}{AE}\quad \text{или}\quad AE^2=AB.BE,$$

т. е. въ точкѣ E прямая AB дѣлится внутренне въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

Такъ какъ въ пропорціи (2) AQ+AB=AE′+AB=BE′; AQ=AE′; AB+AP=PQ+AP=AQ=AE′; то имѣемъ

$$\frac{BE'}{AE'}=\frac{AE'}{AB}\quad \text{или}\quad AE'^2=AB.BE',$$

т. е. въ точкѣ E′ прямая AE дѣлится внѣшне въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

Алгебраическое рѣшеніе. Алгебраически задача рѣшается такъ: пусть будетъ a длина данной прямой AB, означимъ чрезъ x разстояніе искомой точки отъ A, т. е. длину AE, то имѣемъ уравненіе:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}\quad \text{или}\quad x^2+ax-a^2=o,\ \text{откуда:}$$

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}\quad \text{или}\quad x=-\frac{a}{2}\pm\frac{a}{2}\sqrt{5},\ \text{т. е.}$$

одно рѣшеніе положительное: $x_1=AE=\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$; другое отрицательное: $x^2=AE'=-\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$.

Первое изъ этихъ рѣшеній даетъ внутреннее, а второе внѣшнее дѣленіе прямой въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

Вычисленіе сторонъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ. Птоломеева теорема.

§ 114. **Теорема.** *Отношеніе стороны правильнаго описаннаго многоугольника къ сторонѣ одноименнаго правильнаго вписаннаго равно отношенію радіуса окружности къ апоѳемѣ вписаннаго.*

Пусть AB (чер. 213) есть сторона правильнаго описаннаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ; означимъ длину AB чрезъ A_n. Сторона одноименнаго вписаннаго будетъ ab (§ 73, зад. 2); означимъ длину ея чрезъ a_n. Апоѳема описаннаго равна радіусу окружности r; апоѳема вписаннаго — α_n. Требуется доказать, что

Чер. 213.

$$\frac{A_n}{a_n}=\frac{r}{\alpha_n}.$$

Доказ. Сторона AB || ab и слѣдовательно △ABO ∾ △abo; въ подобныхъ же треугольникахъ стороны пропорціональны высотамъ (§ 93, теор. 4, слѣд. 3), а потому

$$\frac{AB}{ab}=\frac{OV}{ov},\quad \text{или}\quad \frac{A_n}{a_n}=\frac{r}{\alpha_n}.$$

Задача 1. *По данному радіусу r и сторонѣ правильнаго вписаннаго многоугольника a_n вычислить сторону одноименнаго описаннаго A_n.*

Рѣш. Изъ пропорціи $\frac{A_n}{a_n}=\frac{r}{\alpha_n}$ имѣемъ $A_n=\frac{a_n r}{\alpha_n}$. Но изъ прямоугольнаго треугольника avo можно опредѣлить апоѳему $vo=\alpha_n$, $\alpha_n=\sqrt{r^2-\frac{a_n^2}{4}}$ (§ 89, теор. 1, слѣд. 2) и слѣдов.

$$A_n=\frac{a_n r}{\sqrt{r^2-\frac{a_n^2}{4}}}.$$

Задача 2. *По данному радіусу r и сторонѣ правильнаго описаннаго многоугольника A_n вычислить сторону одноименнаго вписаннаго a_n.*

Рѣш. Апоѳема правильнаго вписаннаго многоугольника

$$\alpha_n = \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}} \text{ и слѣдов. получимъ } \frac{A_n}{a_n} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}};$$

откуда

$$a_n = \frac{A_n r}{\sqrt{r^2 + \frac{A_n^2}{4}}}.$$

§ 115. **Теорема.** *Апоѳема правильнаго вписаннаго многоугольника есть средняя пропорціональная между радіусомъ и полусуммою радіуса и апоѳемы вписаннаго правильнаго многоугольника половиннаго числа сторонъ.*

Пусть AB (чер. 214) есть сторона правильнаго вписаннаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ, апоѳема его $OV = \alpha_n$.

Чер. 214.

Сторона правильнаго вписаннаго многоугольника, имѣющаго $2n$ сторонъ, будетъ AC (§ 73, зад. 4); апоѳема его $OG = \alpha_{2n}$; радіусъ окружности $OC = r$. Требуется доказать, что

$$\alpha_{2n}^2 = r \cdot \frac{r + \alpha_n}{2}.$$

Доказ. Если изъ средины G стороны AC опустимъ перпендикуляръ GE на OC, то CV раздѣлится въ точкѣ E пополамъ, такъ какъ $\triangle ACV \infty \triangle GCE$ и G есть средина AC; слѣдов. $CE = EV$ (§ 92, теор.). Въ $\triangle GCO$ катетъ OG есть средняя пропорціональная между гипотенузою OC и проложеніемъ OE этого катета на гипотенузу (§ 88, теор. 1), т. е. $OG^2 = OC \cdot OE$; но

$$OE = OV + VE = \alpha_n + \frac{VC}{2} = \alpha_n + \frac{OC - OV}{2} = \alpha_n + \frac{r - \alpha_n}{2} = \frac{r + \alpha_n}{2},$$

слѣдов. $\alpha_{2n}^2 = r \cdot \dfrac{r + \alpha_n}{2}$, что и треб. доказ.

Задача 1. *По данному радіусу r и сторонѣ a_n правильнаго вписаннаго многоугольника вычислить сторону правильнаго вписаннаго многоугольника a_{2n} съ двойнымъ числомъ сторонъ.*

Рѣш. Уравненіе $\alpha_{2n}^2 = r \cdot \dfrac{r + \alpha_n}{2}$ даетъ соотношеніе между

апоѳемами. Изъ $\triangle AGO$ и $\triangle AOV$ имѣемъ:

$$\alpha_{2n}^2 = r^2 - \frac{a_{2n}^2}{4} \text{ и } \alpha_n = \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}};$$

вставляя α_{2n}^2 и α_n въ первое уравненіе, получимъ:

$$r^2 - \frac{a_{2n}^2}{4} = \frac{r}{2}\left(r + \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}\right), \text{ или } r^2 - \frac{a_{2n}^2}{2} = r\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}},$$

откуда

$$a_{2n}^2 = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}\right), \text{ или}$$

$$a_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}\right)} = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - a_n^2}\right)}.$$

Задача 2. *По данному радіусу r и данной сторонѣ правильнаго вписаннаго многоугольника — a_{2n} вычислить сторону правильнаго вписаннаго многоугольника, имѣющаго половинное число сторонъ.*

Рѣш. Вставляя въ уравненіе $\alpha_{2n}^2 = r \cdot \dfrac{r + \alpha_n}{2}$ выраженія

$$\alpha_{2n}^2 = r^2 - \frac{a_{2n}^2}{4} \text{ и } \alpha_n = \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}, \text{ получимъ:}$$

$$r^2 - \frac{a_{2n}^2}{4} = \frac{r}{2}\left(r + \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}\right).$$

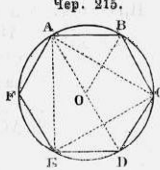
Опредѣляя изъ этого уравненія a_n, найдемъ:

$$a_n = \frac{a_{2n}}{r}\sqrt{4r^2 - a_{2n}^2}.$$

§ 116. **Теорема 1.** *Сторона правильнаго вписаннаго шестиугольника равна радіусу окружности.*

Пусть AB (чер. 215) есть сторона правильнаго вписаннаго шестиугольника, и требуется доказать, что $AB = r$, гдѣ r радіусъ окружности.

Чер. 215.



Доказ. Уголъ центральный $AOB = \dfrac{4d}{6} = \dfrac{2}{3}d$. Слѣдов. въ $\triangle AOB$ сумма двухъ угловъ $\angle A + \angle B = 2d - \dfrac{2}{3}d = {}^4/_3\, d$. Но $AO = BO$, какъ радіусы, а потому $\angle A = \angle B$, значитъ каждый изъ

угловъ A и B равенъ тоже $\frac{2}{3}d$. Т. е. $\triangle AOB$ равносторонній и сторона $AB=r$.

Слѣдствіе 1. *Сторона вписаннаго равносторонняго треугольника равна радіусу окружности, умноженному на $\sqrt{3}$.*

Потому что, соединяя чрезъ одну вершины правильнаго вписаннаго шестиугольника, получимъ равносторонній вписанный треугольникъ ACE, такъ какъ въ точкахъ A, C и E окружность дѣлится на три равныя части. Изъ прямоугольнаго треугольника AED (§ 72, теор. 1, слѣд. 2), имѣемъ: $AE^2=AD^2-ED^2$, или, такъ какъ $AD=2r$ и $ED=r$ (какъ сторона шестиугольника), то $AE^2=4r^2-r^2=3r$, откуда $AE=r\sqrt{3}$.

Слѣдствіе 2. Удвоивая число сторонъ правильнаго вписаннаго шестиугольника, получимъ прав. вписанный 12-ти угольникъ, сторона котораго опредѣлится чрезъ радіусъ, на основаніи § 115 зад. 1. Такимъ же образомъ по сторонѣ 12-ти угольника опредѣлятся послѣдовательно стороны правильныхъ вписанныхъ 24, 48, 96..... угольниковъ. Числа 3, 6, 12..... выражаются формулой $3 \cdot 2^m$, въ которой m означаетъ каждое изъ чиселъ 0,1,2,3.... Поэтому можно, на основаніи сказаннаго, вписать въ окружность и вычислить сторону всякаго правильнаго вписаннаго многоугольника, имѣющаго $3 \cdot 2^m$ сторонъ. По сторонѣ вписаннаго можно построить сторону одноименнаго описаннаго и вычислить длину ея (§ 114, зад. 1). Слѣдов. можно выразить черезъ радіусъ сторону прав. описаннаго многоугольника, имѣющаго 3, 6, 12,... вообще $3 \cdot 2^m$ сторонъ.

Такимъ способомъ найдемъ, что *сторона описаннаго равносторонняго треугольника равна двойной сторонѣ вписаннаго, т. е. равна $2r\sqrt{3}$.*

Теорема 2. *Сторона вписаннаго квадрата равна радіусу, умноженному на $\sqrt{2}$.*

Проведемъ два между собою перпендикулярные діаметра AB и CD (чер. 216), то хорда AC будетъ стороною вписаннаго квадрата; требуется доказать, что $AC=r\sqrt{2}$.

Чер. 216.

Доказ. Изъ прямоугольнаго треугольника AOC имѣемъ $AC^2=AO^2+CO^2$ или $AC^2=2r^2$, откуда $AC=r\sqrt{2}$.

Слѣдствіе. По сторонѣ вписаннаго квадрата можно послѣдовательно вписать, описать и вычислить стороны правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ 8, 16, 32.... или вообще 2^m сторонъ, гдѣ m равно 2, 3, 4, 5....

Теорема 3. *Сторона правильнаго вписаннаго десятиугольника равна большей части радіуса, раздѣленнаго внутренне въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.*

Пусть AB (чер. 217) есть сторона правильнаго вписаннаго десятиугольника; радіусъ окружности $AO=r$. Требуется доказать, что AB равно большей части радіуса, дѣленнаго внутренне въ среднемъ и крайнемъ отношеніи (§ 113).

Чер. 217.

Доказ. Центральный $\angle AOB=\frac{4d}{10}={}^2/_5d$. Въ $\triangle AOB$ сумма двухъ угловъ $A+B=2d-{}^2/_5d={}^8/_5d$. Но $\angle A=\angle B$, потому что $AO=OB$ (§ 52, теор. 1), слѣдов. (акс. 1) $\angle A=\angle B={}^4/_5d$. Пусть прямая BD дѣлитъ уголъ B пополамъ, т. е. пусть $\angle ABD=\angle OBD={}^2/_5d$, тогда $\triangle BDO$ будетъ равнобедренный, потому что $\angle DOB=\angle OBD={}^2/_5d$ и слѣд. сторона $BD=DO$ (§ 52, теор. 2). Треугольникъ ABD тоже равнобедренный, потому что $\angle ADB$, какъ внѣшній $\triangle DBO$, равенъ $\angle OBD+\angle DOB={}^4/_5d$; слѣдов. $\angle BAD=\angle ADB={}^4/_5d$, а потому $AB=BD=DO$. Т. обр. сторона AB десятиугольника равна DO и мы докажемъ, что DO есть большая часть радіуса AO, дѣленнаго въ точкѣ D внутренне въ среднемъ и крайнемъ отношеніи. Въ самомъ дѣлѣ прямая BD дѣлитъ $\angle B$ пополамъ и, значитъ, раздѣляетъ противулежащую углу сторону AO на части, находящіяся въ отношеніи равномъ отношенію прилежащихъ сторонъ (§ 91, теор. 2), т. е., $\frac{AD}{DO}=\frac{AB}{BO}$ или, такъ какъ $AB=DO$, то $\frac{AD}{DO}=\frac{DO}{BO}$, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1. *Сторона правильнаго вписаннаго десятиугольника равна $\frac{r}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$.*

Слѣдствіе 2. Соединивъ чрезъ одну вершины правильнаго вписаннаго десятиугол., получимъ правильный вписанный пятиугольн. На основаніи §115 (зад.2) имѣемъ: $a_5=\frac{a_{10}}{r}\sqrt{r^2-a_{10}^2}$

и вставляя $a_{10}=\frac{r}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$, получимъ: $a_5=r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Слѣдствіе 3. Въ окружность можно вписать и описать стороны правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ 5, 10, 20......, или вообще имѣющихъ $5 \cdot 2^m$ равныхъ сторонъ, гдѣ m равно 0, 1, 2, 3.......

§ 117. **Теорема.** *Во всякомъ вписанномъ четыреугольникѣ произведеніе діагоналей (т. е. чиселъ, выражающихъ длины) равно суммѣ произведеній противуположныхъ сторонъ.*

Чер. 218.

Пусть ABCD (чер. 218) есть вписанный четыреугольникъ и требуется доказать, что $BD \cdot AC = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

Доказ. Если отложимъ $\angle ABK$, равный $\angle DBC$, то $\triangle ABK$ и $\triangle DBC$ будутъ подобны, потому что у нихъ есть по два равныхъ угла (§ 93, теор. 4), а именно: $\angle ABK = \angle DBC$, по построенію, и $\angle BAK = \angle BDC$, какъ опирающіеся на ту же дугу BC (§ 109). Слѣдов. (§ 92, теор.)

$$\frac{AK}{AB}=\frac{CD}{BD} \text{ или } AK \cdot BD = AB \cdot CD \ldots. (1).$$

$\triangle CBK \infty \triangle ABD$, потому что $\angle BCK = ADB$, какъ опирающіеся на одну и туже дугу AB, и кромѣ того, если къ равнымъ, по построенію, угламъ DBC и ABK прибавимъ по углу KBD, то получимъ равные углы (акс. 2), т. е. получимъ $\angle KBC = \angle ABD$. Слѣдов. имѣемъ пропорцію

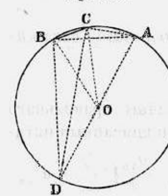
$$\frac{KC}{BC}=\frac{AD}{BD}, \text{ или } KC \cdot BD = BC \cdot AD \;\; (2)$$

складывая (1) со (2), получимъ:

$$BD\,(AK+KC)=AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

Но $AK+KC=AC$, и потому

$$BD \cdot AC = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$



Чер. 219.

Замѣчаніе. Теорема эта извѣстна подъ названіемъ Птоломеевой теоремы.

Слѣдствіе 1. На основаніи этой теоремы можно *выразить черезъ радіусъ сторону правильнаго пятнадцатиугольника.*

Въ самомъ дѣлѣ, отложимъ отъ точки A хорду AB (чер. 219), равную сторонѣ

правильнаго вписаннаго шестиугольника, т. е. радіусу r, и отъ той же точки A хорду AB, равную сторонѣ правильнаго вписаннаго десятиугольника, т. е. равную $\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$;

затѣмъ, соединимъ точки B и C прямою BC, которая будетъ стороною правильнаго вписаннаго пятнадцатиугольника, потому что

$$\angle COB = \angle AOB - \angle AOC = 60^\circ - 36^\circ = 24^\circ.$$

Чтобы выразить сторону $BC = x$ черезъ радіусъ, проведемъ діаметръ AD и соединимъ точки B и C съ точкою D прямыми BD и CD. Четыреугольникъ ACBD есть вписанный и слѣдов., по доказанной теоремѣ, имѣемъ

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD + BC \cdot AD \ldots\ldots. \;\; (1)$$

Но $AB=r$ (§ 116 теор. I); $AC=r.\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (§ 116, теор. 3);

$AD=2r$; $BD=\sqrt{AD^2-AB^2}=r\sqrt{3}$; $CD=\sqrt{AD^2-AC^2}=$ $=\frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$;

поэтому, вставя эти выраженія въ уравненіе (1), получимъ

$$r \cdot \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{r \cdot (\sqrt{5}-1)}{2} \cdot r\sqrt{3} + 2r \cdot x,$$

откуда $x=\frac{r}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)$.

Слѣдствіе 2. Въ окружность можно вписать и описать правильные многоугольники съ 15, 30, 60.... и вообще съ $15 \cdot 2^m$ равными сторонами, и вычислить стороны этихъ многоугольниковъ.

СПОСОБЪ ПРЕДѢЛОВЪ.

ОТДѢЛЪ VIII.

Геометрическія перемѣнныя и ихъ предѣлы.

Предѣлъ несоизмѣримой прямой, несоизмѣримаго угла и несоизмѣримой дуги.

§ 118. Въ § 82 сказано, что если данная прямая AB (черт. 220) несоизмѣрима съ единицею мѣры CD, то нельзя найти цѣлое или дробное число, показывающее точно сколько разъ въ данной прямой укладывается единица мѣры или часть этой единицы, а можно только найти число, на сколько угодно близкое къ сказанному. Для того, чтобы найти такое приближенное число, мы должны поступать слѣдующимъ образомъ: раздѣлимъ единицу мѣры CD на n равныхъ частей и n-ую часть будемъ откладывать на AB до тѣхъ поръ, пока не получимъ остатокъ меньшій $\frac{CD}{n}$. Положимъ, что $\frac{CD}{n}$ уложилось въ AB k разъ и получился остатокъ $EB < \frac{CD}{n}$. Прямая AE будетъ соизмѣрима съ единицею мѣры и длина ея равна $\frac{k}{n}$. Если n чрезвычайно большое число, то остатокъ EB чрезвычайно малъ и можно n взять столь большимъ, что остатокъ меньшій n-ой доли единицы мѣры будетъ меньше всякой произвольно малой прямой. Такимъ образомъ всегда можно найти прямую AE, которая будетъ соизмѣрима съ CD и будетъ менѣе AB на произвольно малую прямую. Такая прямая AE наз. *приближеніемъ* данной прямой AB. Приближеніе будетъ мѣняться съ измѣненіемъ числа дѣленій единицы мѣры и когда это число дѣленій не дано (полагается произвольнымъ), то приближеніе AE прямой AB будетъ *перемѣнною величиною.* Разность прямой AB и ея приближенія AE можетъ быть сдѣлана менѣе произвольно малой прямой. Съ увеличеніемъ числа n эта разность уменьшается и приближеніе AE все болѣе и болѣе дѣлается близкимъ къ прямой AB, не достигая никогда ея. Такимъ образомъ прямая AB есть величина постоянная, къ которой перемѣнная прямая AE приближается, не достигая никогда AB, и притомъ разность между AB и AE можетъ быть сдѣлана менѣе всякой произвольно малой прямой. *Постоянная величина* AB, *къ которой перемѣнная* AE *приближается, не достигая никогда ея, и притомъ такъ, что разность между постоянной и перемѣнной можетъ быть сдѣлана произвольно малой, называется предѣломъ перемѣнной.*

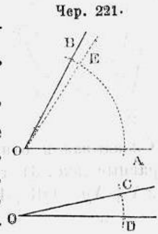
Черт. 220.

Длиною несоизмѣримой прямой AB *называется предѣлъ, къ которому приближается длина приближенія* $AB = \frac{k}{n}$ *съ увеличеніемъ числа дѣленій n единицы мѣры.*

Если отложимъ n-ую часть CD на AB $k+1$ разъ, то получимъ другую перемѣнную прямую AV, предѣломъ которой будетъ опять AB. Значитъ прямая AB есть предѣлъ двухъ перемѣнныхъ прямыхъ, изъ которыхъ одна AE меньше AB, а другая AV—больше AB.

§ 119. Если уголъ AOB (черт. 221) несоизмѣримъ съ угломъ COD, принятымъ за единицу мѣры угловъ, то опять раздѣлимъ уголъ COD на n равныхъ частей и пусть уголъ $\frac{COD}{n}$ уложится въ данномъ углѣ k разъ съ остаткомъ EOB, меньшимъ угла $\frac{COD}{n}$; тогда $\angle AOE$ соизмѣримъ съ единицею мѣры и равенъ $\frac{k}{n}$. Разсуждая, какъ въ предыдущемъ §, заключаемъ, что $\angle AOE$ есть приближеніе даннаго угла, что разность между даннымъ угломъ и этимъ приближеніемъ можетъ быть сдѣлана менѣе всякаго произвольно малаго угла, и что *величиною несоизмѣ-*

Черт. 221.



римаго угла называется предѣлъ, къ которому приближается уголъ $AOE=\frac{k}{n}$ *съ увеличеніемъ числа дѣленій n единицы мѣры угловъ.*

Такимъ же образомъ длиною дуги AB, несоизмѣримою съ единицею мѣры дугъ CD, называется предѣлъ, къ которому приближается дуга $AE=\frac{k}{n}$ съ увеличеніемъ числа дѣленій *n* единицы дугъ.

§ 120. Если за единицу мѣры дугъ примемъ прямую, то, очевидно, что такая единица мѣры не можетъ укладываться въ дугѣ и то, что въ этомъ случаѣ должно понимать подъ длиною дуги и длиною окружности, разъяснится на основаніи теоремъ слѣдующихъ параграфовъ.

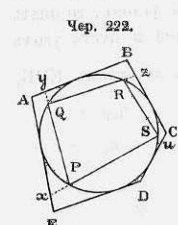
Предѣлъ периметровъ и площадей правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ.

§ 121. **Теорема.** *Периметръ всякаго описаннаго около окружности многоугольника болѣе периметра всякаго вписаннаго.*

Пусть около окружности описанъ какой нибудь многоугольникъ ABCDE (чер. 222) и вписанъ многоугольникъ PQRS; требуется доказать, что

$$AB+BC+CD+DE+EA > QR+RS+SP+PQ.$$

Чер. 222.



Доказ. Продолжимъ всѣ стороны вписаннаго многоугольника въ одинаковомъ направленіи до пересѣченія съ сторонами описаннаго въ точкахъ *x*, *y*, *z*, *u*. Такъ какъ прямая есть кратчайшее разстояніе между двумя точками, то имѣемъ:

$$Qy+yB+Bz > QR+Rz$$
$$Rz+zC+Cu > RS+Su$$
$$Su+uD+DE+Ex > SP+Px$$
$$Px+xA+Ay > PQ+Qy.$$

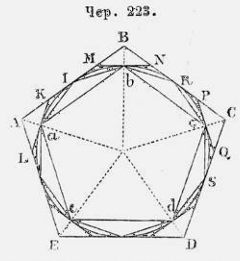
Складывая и отнимая отъ неравныхъ поровну, получимъ неравные (акс. 3), т. е. $yB+Bz+zC+Cu+uD+DE+Ex+$ $+xA+Ay > QR+RS+SP+PQ$,

или $AB+BC+CD+DE+EA > QR+RS+SP+PQ$,
что и требовалось доказать.

§ 122. **Теорема.** *Съ удвоеніемъ числа сторонъ правильнаго описаннаго многоугольника периметръ его уменьшается, а съ удвоеніемъ числа сторонъ правильнаго вписаннаго многоугольника—периметръ его увеличивается.*

Пусть ABCDE (чер. 223) есть правильный описанный многоугольникъ, а *abcde* правильный вписанный многоугольникъ и требуется доказать, что съ удвоеніемъ числа сторонъ периметръ перваго уменьшается, а втораго увеличивается.

Чер. 223.



Доказ. Чтобы удвоить число сторонъ прав. описаннаго многоуг. (§ 73, задача 3), должно вершины его соединить прямыми съ центромъ, и въ точкахъ пересѣченія этихъ прямыхъ съ окружностью провести касательныя KL, MN, PQ и т. д., получится правильный описанный многоугольникъ LKMNPQ. . . . . съ двойнымъ числомъ сторонъ. Въ этомъ многоугольникѣ стороны LK, MN, PQ меньше соотвѣтственныхъ имъ ломаныхъ

$$LA+AK;\ MB+BN;\ PC+CQ \text{ и т. д.}$$

Остальныя же стороны многоугольника съ удвоеннымъ числомъ сторонъ составляютъ остальныя части периметра даннаго описаннаго многоугольника; слѣд. первый периметръ меньше втораго. т. е. съ удвоеніемъ числа сторонъ периметръ описаннаго многоугольника уменьшается.

Чтобы удвоить число сторонъ правильнаго вписаннаго многоуг. (§ 73, зад. 4), должно средины дугъ, стягиваемыхъ сторонами, соединить съ вершинами многоугольника прямыми, и получится правильный вписанный многоуг. *aIbRcS*.... съ двойнымъ числомъ сторонъ. Каждая изъ сторонъ даннаго многоугольника меньше соотвѣтствующей ей суммы двухъ сторонъ полученнаго многоугольника; такъ, напр. $ab < aI+$ $+Ib$; слѣд. периметръ перваго вписаннаго многоугольника меньше периметра втораго, т. е. периметръ вписаннаго правильнаго многоугольника съ удвоеніемъ числа сторонъ увеличивается.

§ 123. Если дана окружность, т. е. ея радіусъ, и около окружности описанъ правильный многоугольникъ, имѣющій n сторонъ, то периметръ его есть опредѣленная длина, когда n дано. Если же число сторонъ будемъ удвоивать, то этотъ периметръ будетъ мѣняться и сдѣлается *перемѣнною величиною*, если положимъ число сторонъ произвольнымъ (какимъ угодно); такую перемѣнную величину периметра описаннаго многоугольника будемъ означать буквою P. По теоремѣ § 122 съ удвоеніемъ числа сторонъ периметръ описаннаго многоугольника уменьшается, и вмѣстѣ съ тѣмъ, по теоремѣ § 121, онъ остается постоянно больше периметра всякаго вписаннаго; слѣд. периметръ многоугольника не можетъ быть сдѣланъ менѣе нѣкоторой постоянной длины, къ которой онъ приближается, не достигая никогда ея, и притомъ такъ, что разность между периметромъ и этой постоянной длиной можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою. Такая постоянная длина наз. *предѣломъ перемѣнной длины периметра* P *описаннаго многоугольника*; будемъ этотъ предѣлъ означать буквою L, такъ что $P>L$ и разность $P—L$ можетъ быть сдѣлана, какъ угодно малою.

Подобнымъ же образомъ периметръ прав. вписаннаго многоуг. при произвольномъ числѣ сторонъ есть перемѣнная величина, которую будемъ означать буквою p. По теоремѣ § 122 периметръ вписаннаго многоугольника p съ удвоеніемъ числа сторонъ увеличивается и, вслѣдствіе теоремы § 121, остается меньшимъ всякаго описаннаго многоугольника; слѣд. этотъ периметръ не можетъ быть сдѣланъ болѣе нѣкоторой постоянной длины, къ коротой онъ приближается, не достигая никогда ея, и притомъ такъ, что разность между этой постоянной длиной и периметромъ можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою. Такая постоянная длина наз. *предѣломъ перемѣнной длины периметра вписаннаго многоугольника*. Будемъ этотъ предѣлъ означать буквою l, такъ что $l>p$ и разность $l—p$ можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою.

§ 124. **Теорема**. *Разность между периметромъ описаннаго правильнаго многоугольника и периметромъ вписаннаго правильнаго многоугольника того же числа сторонъ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой произвольно малой длины.*

Пусть опять P и p означаютъ перемѣнныя длины периметровъ, AB и ab (чер. 224) соотвѣтствующія стороны, OM и OH— апоѳемы одноименныхъ правильныхъ многоугольниковъ опи-

саннаго и вписаннаго въ окружности O радіуса OM. Требуется доказать, что разность $P—p$ можетъ быть сдѣлана, какъ угодно малою.

Чер. 224.

Доказ. Периметры правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ относятся, какъ апоѳемы (§ 98), слѣд.

$$\frac{P}{p}=\frac{OM}{OH}\text{, откуда }\frac{P-p}{P}=\frac{OM-OH}{OM},$$

но $OM—OH=MH$, поэтому $\frac{P-p}{P}=\frac{MH}{OM}$.

Перпендикуляръ MH меньше наклонной AM, а эта послѣдняя есть сторона вписаннаго правильнаго многоугольника, слѣд. можетъ быть сдѣлана съ удвоеніемъ числа сторонъ его какъ угодно малою; а потому MH и подавно можетъ быть сдѣлана менѣе всякой произвольно малой длины. Дробь $\frac{MH}{OM}$ имѣетъ постоянный знаменатель, и съ уменьшеніемъ числителя MH можетъ быть сдѣлана, какъ угодно малою—значитъ и дробь $\frac{P-p}{P}$ можетъ сдѣлаться произвольно малою. Но съ удвоеніемъ числа сторонъ знаменатель P уменьшается, отчего дробь $\frac{P-p}{P}$ увеличивается, а потому $P-p$ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой произвольно малой длины.

§ 125. **Теорема**. *Периметръ правильнаго описаннаго многоугольника и периметръ правильнаго вписаннаго въ ту же окружность многоугольника имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ.*

Сохраняя обозначенія предыдущихъ параграфовъ докажемъ, что $L=l$.

Доказ. По § 123 имѣемъ $P>L$ и $p<l$, откуда

$$P-p>L-l;$$

если бы L было болѣе l, то разность $P-p$ не могла бы быть сдѣлана какъ угодно малою, а оставалась бы всегда болѣе постоянной разности $L-l$, что противно § 124; слѣд.

$$L \ngtr l \qquad (1)$$

По тому же § 123 положительныя разности $P—L$ и $l—p$ могутъ быть сдѣланы какъ угодно малыми; если бы L было менѣе l, то разность $l-L$ была положительна, а потому можно было бы сдѣлать

$$P - L < \frac{l - L}{2} \quad \text{и} \quad l - p < \frac{l - L}{2}, \quad \text{откуда}$$

$$P - L + l - p < l - L \quad \text{или} \quad p > P,$$

что противно § 121, слѣд.

$$L \not< l \qquad (2).$$

Изъ (1) и (2) видно (акс. 9), что $L = l$.

§ 126. **Теорема**. *Периметры всѣхъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ около данной окружности имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ, съ какого бы правильнаго многоугольника ни было начато удвоеніе сторонъ.*

Пусть P_n и p_n означаютъ перемѣнныя длины периметровъ правильныхъ одноименныхъ описаннаго и вписаннаго многоугольниковъ, происшедшихъ отъ удвоенія числа сторонъ какихъ нибудь правильныхъ многоугольниковъ, напр. правильныхъ треугольниковъ. P_m и p_m—перемѣнныя величины одноименныхъ правильныхъ описаннаго и вписаннаго въ ту же окружность многоугольниковъ, происшедшихъ отъ удвоенія числа сторонъ другихъ правильныхъ многоугольниковъ, напр. квадратовъ. Пусть предѣлъ P_n и p_n будетъ L, а P_m и p_m—L′; требуется доказать, что L=L′.

Доказ. Изъ § 121 слѣдуетъ, что периметръ всякаго вписаннаго многоугольника не можетъ быть болѣе всякаго описаннаго около той же окружности многоугольника, поэтому $p_n \not> P_m$ и $p_m \not> P_n$. Если же $p_n \not> P_m$, то и L, предѣлъ p_n, не можетъ быть болѣе L′, предѣла P_m, т. е.

$$L \not> L'.$$

Подобнымъ образомъ изъ того, что $p_m \not> P_n$ заключимъ, что L не можетъ быть менѣе L′, т. е.

$$L \not< L'.$$

Итакъ, L не можетъ быть ни болѣе ни менѣе L′, а потому (акс. 9) $\qquad L = L'$.

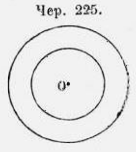
Опредѣленіе. *Длиною окружности называется тотъ единственный предѣлъ, къ которому стремятся длины периметровъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ около этой окружности многоугольниковъ съ удвоеніемъ числа ихъ сторонъ.*

§ 127. Въ предыдущихъ параграфахъ мы разсмотрѣли нѣсколько величинъ, которыя не имѣютъ постояннаго значенія. Такъ: приближеніе длины прямой, приближеніе длины дуги, приближеніе угла измѣняются съ измѣненіемъ числа дѣленій и соотвѣтствующихъ единицъ мѣръ; длины периметровъ описанныхъ или вписанныхъ въ одну и ту же окружность правильныхъ многоугольниковъ измѣняются съ измѣненіемъ числа сторонъ этихъ многоугольниковъ. Такія величины называются перемѣнными. Вообще, *перемѣнной величиной называется всякая величина, не имѣющая постояннаго значенія, а измѣняющаяся.* Числа, выражающія перемѣнныя величины, суть *перемѣнныя числа.* Ариѳметическимъ примѣромъ перемѣннаго числа можетъ служить періодическая дробь, измѣняющаяся съ измѣненіемъ числа десятичныхъ знаковъ ея.

§ 128. Въ тѣхъ же параграфахъ было сказано, что каждая изъ разсмотрѣнныхъ перемѣнныхъ величинъ приближается къ нѣкоторой постоянной величинѣ, оставаясь постоянно болѣе или постоянно менѣе послѣдней; и притомъ разность между перемѣнной и той постоянной, къ которой она приближается, можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою; такія постоянныя величины мы назвали предѣлами. Вообще *предѣломъ перемѣнной величины называется такая постоянная величина, къ которой перемѣнная приближается, оставаясь или постоянно болѣе, или постоянно менѣе постоянной величины и притомъ приближается такъ, что разность между перемѣнною и этою постоянною можетъ быть сдѣлана произвольно малою.* Перемѣнное число, которымъ выражается перемѣнная величина, имѣетъ своимъ предѣломъ — постоянное число, которымъ выражается предѣлъ этой перемѣнной величины.

Изъ этого опредѣленія видно, что перемѣнное число, приближаясь къ нѣкоторому постоянному числу и оставаясь постоянно болѣе или постоянно менѣе его, будетъ имѣть предѣломъ это постоянное число лишь только тогда, когда разность между перемѣннымъ числомъ и сказаннымъ постояннымъ можетъ быть сдѣлана менѣе всякаго произвольно малаго числа. Если это послѣднее условіе не осуществлено, то перемѣнное число не будетъ имѣть своимъ предѣломъ то постоянное число, къ которому оно приближается, напр. возьмемъ двѣ концентрическія окружности (чер. 225), тогда перемѣнное число, выражающее длину периметровъ правильныхъ многоугольниковъ, описанныхъ около большей окружности, будетъ имѣть своимъ предѣломъ число, выражающее длину большей окружности; хотя длина сказанныхъ периметровъ съ удвоеніемъ числа сторонъ описанныхъ многоугольниковъ при-

Чер. 225.



ближается и постоянно остается болѣе длины меньшей окружности, однако число, выражающее длину послѣдней, не есть предѣлъ числа, выражающаго длину вышеупомянутыхъ периметровъ, потому что разность между ними всегда остается болѣе разности чиселъ, выражающихъ длины данныхъ окружностей. Подобнымъ образомъ дробь 0,988.... приближается къ 1 и остается постоянно менѣе ея, но не имѣетъ своимъ предѣломъ 1, потому что разность между 1 и этой дробью болѣе $\frac{1}{90}$ (такъ какъ предѣлъ 0,988.... есть $\frac{89}{90}$) и слѣдов. не можетъ быть сдѣлана произвольно малою.

§ 129. Если перемѣнное число болѣе своего предѣла, то разность между перемѣннымъ числомъ и его предѣломъ есть также перемѣнное число, потому что уменьшаемое—перемѣнное. Такая перемѣнная разность имѣетъ предѣломъ нуль и называется *безконечно-малымъ числомъ*. Напр. число, выражающее избытокъ длины периметра правильнаго многоугольника, описаннаго около окружности, надъ длиною этой окружности, есть безконечно-малое число.

Если перемѣнное число менѣе своего предѣла, то разность между предѣломъ и перемѣннымъ числомъ есть также перемѣнное число, потому что вычитаемое—перемѣнное. Предѣлъ этой разности есть нуль, а самая разность—число безконечно-малое. Напр. число, выражающее избытокъ длины окружности надъ перемѣнною длиною периметра правильнаго вписаннаго въ эту окружность многоугольника, есть число безконечно-малое.

Примѣромъ безконечно-малаго числа можетъ служить разность 1—0,999....

Вообще, *безконечно-малымъ числомъ называется такое перемѣнное число, предѣлъ котораго есть нуль.*

§ 130. **Теорема**. *Всякое перемѣнное число не можетъ имѣть болѣе одного предѣла.*

Пусть дано какое-нибудь перемѣнное число q, предѣлъ котораго есть число t; требуется доказать, что q не можетъ имѣть предѣломъ другое число t', отличное отъ t.

Доказ. Такъ какъ оба предѣла t и t' суть числа постоянныя, то и разность между большимъ изъ нихъ и меньшимъ есть нѣкоторое постоянное положительное число k, не равное нулю, т. е. полагая, что $t>t'$, будемъ имѣть:

$$t-t'=k.$$

Вычитая изъ обѣихъ частей этого равенства перемѣнное число q, получимъ: $t-t'-q=k-q$ или $(q-t')-(q-t)=k$—равенство, которое не можетъ существовать при всякомъ значеніи перемѣннаго q, потому что, по условію, $q-t$ есть безконечно-малое, по сдѣланному предположенію $q-t'$ есть также безконечно-малое; слѣд. разность двухъ безконечно-малыхъ равна постоянному числу k, что невозможно. Такимъ образомъ нельзя допустить существованія другаго предѣла для q, а потому перемѣнное число q другаго предѣла имѣть не можетъ.

§ 131. Если перемѣнное число умножимъ на постоянное, то въ произведеніи получимъ также перемѣнное число. Напр. если перемѣнное число P, выражающее перемѣнную длину периметровъ описанныхъ около данной окружности многоугольниковъ, умножимъ на нѣкоторое постоянное число k, то получимъ въ произведеніи Pk—число перемѣнное, потому что оно будетъ мѣняться съ измѣненіемъ P.

Теорема. *Произведеніе перемѣннаго числа на нѣкоторое постоянное имѣетъ своимъ предѣломъ произведеніе предѣла этого перемѣннаго числа на то же постоянное число.*

Дано перемѣнное число q и предѣлъ его t; требуется доказать, что перемѣнное произведеніе q на нѣкоторое постоянное число k имѣетъ своимъ предѣломъ произведеніе tk,—предѣла t на то же постоянное k.

Доказ. Положимъ, что $q>t$, тогда разность произведеній этихъ чиселъ на постоянное число k, т. е. $qk-tk=(q-t)k$, съ приближеніемъ q къ t уменьшается, потому что одинъ множитель $q-t$ уменьшается; слѣд. qk также приближается къ tk и притомъ такъ, что разность между этими произведеніями $(q-t)k$ можетъ быть сдѣлана безконечно-малою, т. е. менѣе всякаго произвольно-малаго числа, напр. x. Въ самомъ дѣлѣ, изъ опредѣленія предѣла перемѣннаго числа слѣдуетъ, что разность $q-t$ можетъ быть менѣе какого угодно малаго числа, слѣд. она можетъ быть сдѣлана менѣе $\frac{x}{k}$, т. е. $q-t<\frac{x}{k}$, откуда $(q-t)k<x$.

Такимъ образомъ qk приближается къ постоянному числу tk, и разность между ними есть безконечно-малое число. Слѣд. tk есть предѣлъ для qk и притомъ по предыдущей теоремѣ—единственный; что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Произведеніе безконечно-малаго числа на конечное есть перемѣнное число и имѣетъ своимъ предѣломъ нуль, поэтому *произведеніе безконечно-малаго числа на конечное есть также безконечно-малое число*.

§ 132. Если дана окружность, т. е. ея радіусъ, и около окружности описанъ правильный многоугольникъ, имѣющій n сторонъ, то площадь его имѣетъ опредѣленную мѣру, когда n дано. Если же число сторонъ будемъ удвоивать, то площадь будетъ мѣняться и сдѣлается перемѣнной величиной, если положимъ число сторонъ произвольнымъ (какимъ угодно). Если означимъ чрезъ P—перемѣнный периметръ и чрезъ r—радіусъ окружности, то мѣра такой перемѣнной площади будетъ перемѣнное число $\frac{P \cdot r}{2}$ (§ 102, теор. 3). Это число $\frac{P \cdot r}{2}$ есть произведеніе перемѣнной длины периметра P на постоянное $\frac{r}{2}$. По предыдущему § перемѣнное произведеніе $P \cdot \frac{r}{2}$ имѣетъ своимъ предѣломъ $L \cdot \frac{r}{2}$ (гдѣ L—длина окружности) и по теоремѣ § 130 такой предѣлъ есть только одинъ.

Опредѣленіе. *Площадью круга называется тотъ единственный предѣлъ, къ которому приближаются площади правильныхъ описанныхъ многоугольниковъ съ удвоеніемъ числа ихъ сторонъ*.

Вычисленіе длины окружности и площади круга.

§ 133. **Теорема**. *Отношеніе длины всякой окружности къ радіусу этой окружности есть величина постоянная*.

Пусть даны двѣ окружности O и O′ радіусовъ R и R′. Означимъ чрезъ L и L′ длины этихъ окружностей, т. е. предѣлы периметровъ P и P′ одноименныхъ правильныхъ многоугольниковъ, описанныхъ около этихъ окружностей; требуется доказать, что $\frac{L}{R} = \frac{L'}{R'}$.

Доказ. Положимъ, что $P - L = x$ и $P' - L' = x'$, гдѣ x и x' суть безконечно-малыя числа. Тогда $P = L + x$ и $P' = L' + x'$. По теоремѣ § 98 имѣемъ:

$$\frac{P}{R} = \frac{P'}{R'}, \text{ или } \frac{L+x}{R} = \frac{L'+x'}{R'}$$

или

$$\frac{L}{R} + \frac{x}{R} = \frac{L'}{R'} + \frac{x'}{R'}, \text{ откуда}$$

$$\frac{L}{R} - \frac{L'}{R'} = \frac{x'}{R'} - \frac{x}{R}.$$

Это равенство должно существовать при всякомъ числѣ сторонъ описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ, что необходимо требуетъ, чтобы $\frac{L}{R}$ равнялось $\frac{L'}{R'}$, т. е. $\frac{L}{R} - \frac{L'}{R'} = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, если напр. $\frac{L}{R} > \frac{L'}{R'}$, то разность $\frac{L}{R} - \frac{L'}{R'}$ должна равняться нѣкоторому постоянному количеству k, и тогда $k = \frac{x'}{R'} - \frac{x}{R}$ при всякомъ числѣ сторонъ правильныхъ описанныхъ многоугольниковъ, чего быть не можетъ, потому что числители x' и x дробей $\frac{x'}{R'}$ и $\frac{x}{R}$ съ увеличеніемъ числа сторонъ могутъ быть сдѣланы какъ угодно малыми, слѣд. разность $\frac{x'}{R'} - \frac{x}{R}$ можетъ быть сдѣлана тоже менѣе всякой данной величины и слѣд. менѣе k—какъ бы мало ни было k. Точно такимъ же образомъ докажемъ, что не можетъ быть $\frac{L}{R} < \frac{L'}{R'}$ при всякомъ числѣ сторонъ, а потому $\frac{L}{R} = \frac{L'}{R'}$, т. е. отношеніе длины окружности къ радіусу есть число постоянное.

Слѣдствіе. Помножая знаменателя равенства $\frac{L}{R} = \frac{L'}{R'}$ на 2, получимъ $\frac{L}{2R} = \frac{L'}{2R'}$, т. е. *отношеніе длины окружности къ діаметру есть постоянное число*. Это постоянное отношеніе длины окружности къ ея діаметру означаютъ буквою π, т. е.

$$\frac{L}{2R} = \pi.$$

§ 134. Число π можетъ быть вычислено съ какой угодно точностью, на основаніи слѣдующаго: такъ какъ π постоянно для всѣхъ окружностей, то достаточно выбрать одну окружность и найти для нея это отношеніе. Возьмемъ окружность, радіусъ которой равенъ единицѣ, и опредѣлимъ отношеніе этой окружности къ діаметру. Въ такой окружности $\pi=\frac{L}{2}$, т. е. для опредѣленія π должно найти половину предѣла, къ которому приближаются периметры правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ около этой окружности многоугольниковъ съ удвоеніемъ числа ихъ сторонъ или найти предѣлъ, къ которому приближаются половины периметровъ сказанныхъ многоугольниковъ (§ 131). Поэтому полупериметръ всякаго правильнаго вписаннаго въ такую окружность многоугольника представляетъ приближенное значеніе π, меньшее его, а полупериметръ всякаго правильнаго описаннаго многоугольника—приближенное значеніе π, большее его.

Если вычислимъ, начиная напр. съ правильнаго вписаннаго шестиугольника, полупериметры правильныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ окружность радіуса единицы и имѣющихъ 6, 12, 24, 48, 96 и т. д. сторонъ, то получимъ числа, все болѣе и болѣе приближающіяся къ π, но меньшія его.

Если же вычислимъ полупериметры правильныхъ многоугольниковъ о 6, 12, 24, 96 и т. д. сторонахъ, описанныхъ около окружности радіуса единицы, то получимъ числа, все болѣе и болѣе приближающіяся къ π и большія его.

Такое вычисленіе можно сдѣлать такъ: сторона правильнаго вписаннаго шестиугольника a_6 равна радіусу (§ 116, теор. 1), т. е. единицѣ, и слѣдовательно полупериметръ $\frac{P_6}{2}$ равенъ 3 единицамъ. Сторона правильнаго вписаннаго 12-ти угольника a_{12} будетъ (§ 115, зад. 1): $a_{12}=\sqrt{r(2r-\sqrt{4r^2-a_6^2})}$ или такъ какъ $a_6=1$ и $r=1$, то

$a_{12}=\sqrt{2-\sqrt3}=0{,}517638.....$ и полупериметръ $\frac{P_{12}}{2}$ равенъ 3,105828.....

Подобнымъ же обрвзомъ по сторонѣ 12-ти угольника опредѣлимъ сторону правильнаго вписаннаго 24-хъ угольника и его полупериметръ и т. д.

Зная сторону прав. вписаннаго 6-ти, 12-ти и т. д. угольника, опредѣлимъ стороны описанныхъ одноименныхъ многоугольниковъ и ихъ полупериметры (§ 114, зад. 1). Такъ, напр. сторона описаннаго 6-ти угольника опредѣлится по формулѣ:

$$A_6=\frac{a_6 r}{\sqrt{r^2-\frac{a_6^2}{4}}}\text{ или, такъ какъ } a_6=1 \text{ и } r=1,\ A_6=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt3}=\frac{2}{3}\sqrt3=\frac{2}{3}\cdot 1{,}732000=1{,}154700....$$

и полупериметръ $\frac{P_6}{2}=3A_6=3{,}464100.....$

Такимъ образомъ получимъ слѣдующую таблицу:

Число сторонъ	Длина полупериметровъ правильныхъ многоугольниковъ.	
	Вписанные.	Описанные.
6	3,000000	3,464100
12	3,105828	3,315388
24	3,132628	3,159528
48	3,139350	3,146088
96	3,141032	3,142715
192	3,141453	3,141873
384	3,141558	3,141663
768	3,141584	3,141610
1536	3,141591	3,141597
3072	3,141592	3,141594

Число π, какъ сказано, заключается между полупериметрами вписаннымъ и описаннымъ, такъ напр. для правильныхъ многоугольниковъ о 96 сторонахъ находимъ, что

$$\pi>3{,}141032 \quad\text{и}\quad \pi<3{,}142715;$$

откуда заключаемъ, что π равняется 3,14 съ точностью 0,01. Съ такимъ приближеніемъ π было опредѣлено Архимедомъ, который доказалъ, что оно заключается между числами

$$3+\frac{10}{71}=3{,}140....\text{ и } 3+\frac{10}{70}=\frac{22}{7}=3{,}142.....$$

Мецій вычислилъ π съ точностью 0,000001 и нашелъ, что $\pi=\frac{355}{113}$. Это выраженіе π удобно запомнить, потому

что $\frac{1}{\pi} = 113 : 355$. Значеніе π съ 10-тью точными десятичными знаками есть

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots. \text{ а } \frac{1}{\pi} = 0{,}3183098971\ldots.$$

§ 135. **Теорема**. *Длина окружности равна произведенію двойнаго радіуса на постоянное число* π, *т. е. равна* $2\pi R$.

Доказ. По опредѣленію—длина окружности есть тотъ единственный предѣлъ, къ которому стремятся длины периметровъ правильныхъ вписанныхъ или описанныхъ около этой окружности многоугольниковъ съ измѣненіемъ числа ихъ сторонъ, и этотъ предѣлъ мы означили буквою L (§ 126).

По § 133 $\frac{L}{2R} = \pi$, откуда $L = 2\pi R$.

Задача. *По данной длинѣ* L *окружности опредѣлить радіусъ ея* r.

Рѣш. Изъ формулы $L = 2\pi r$, имѣемъ: $r = \frac{L}{2\pi}$, т. е. радіусъ равенъ произведенію половины длины окружности на $\frac{1}{\pi}$.

§ 136. **Теорема**. *Длина дуги* l *въ* n° *опредѣляется по формулѣ* $l = \frac{\pi r n}{180}$.

Доказ. Такъ какъ длина дуги въ 90° равняется четверти длины всей окружности, т. е. $\frac{L}{4}$, и такъ какъ углы относятся какъ ихъ дуги (§ 107), то имѣемъ пропорцію:

$$l : \frac{L}{4} = n^{\circ} : 90^{\circ}, \text{ откуда}$$

$$l = \frac{L \cdot n}{4 \cdot 90}, \text{ но } L = 2\pi R, \text{ слѣд.}$$

$$l = \frac{\pi r n}{180}.$$

Эта формула можетъ служить для опредѣленія одного изъ трехъ количествъ l, r, n по двумъ остальнымъ, потому что изъ нея имѣемъ:

$$r = \frac{180\,l}{\pi n} \text{ и } n = \frac{180\,l}{\pi r}.$$

Слѣдствіе. Дуги двухъ какихъ угодно круговъ назыв. *подобными*, если соотвѣтственные имъ центральные углы равны между собою.

Подобныя дуги пропорціональны ихъ радіусамъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ l и l'—двѣ подобныя дуги радіусовъ r и r' соотвѣтствующія углу въ n°. Имѣемъ:

$$l = \frac{\pi r n}{180} \quad \text{и} \quad l' = \frac{\pi r' n}{180}, \text{ откуда}$$

$$\frac{l}{l'} = \frac{r}{r'}.$$

§ 137. **Теорема**. *Мѣра площади круга равна произведенію квадрата радіуса на постоянное число* π, *т. е. равна* πr^2.

Доказ. По опредѣленію площади круга (§ 132), мѣра этой площади $K = L \cdot \frac{r}{2}$, гдѣ L— длина окружности. Но, по теоремѣ § 135 $L = 2\pi R$, слѣд. $K = \pi r^2$.

Слѣдствіе. *Площади двухъ круговъ относятся, какъ квадраты радіусовъ или какъ квадраты діаметровъ этихъ круговъ.* Потому что, если площади круговъ радіусовъ r и r' будутъ K и K', то $K = \pi r^2$ и $K' = \pi r'^2$, откуда

$$\frac{K}{K'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{4r^2}{4r'^2} = \frac{(2r)^2}{(2r')^2}.$$

Задача. *Найти радіусъ круга и длину окружности, зная площадь* K *этого круга.*

Рѣш. Изъ формулы $K = \pi r^2$ имѣемъ искомый радіусъ

$$r = \sqrt{\frac{K}{\pi}}.$$

Зная r, опредѣлимъ длину окружности по формулѣ:

$$L = 2\pi r = 2\sqrt{\pi K}.$$

§ 138. **Теорема 1**. *Площади круговыхъ вырѣзковъ (секторовъ) въ томъ же кругѣ или въ равныхъ кругахъ относятся, какъ соотвѣтствующія имъ дуги.*

Пусть данъ кругъ O (чер. 226) и требуется доказать, что

$$\frac{\text{пл. } AOB}{\text{пл. } COD} = \frac{\smile AB}{\smile CD}.$$

Для доказательства должно разсуждать совершенно такъ, какъ при доказательствѣ пропорціональности центральныхъ угловъ дугамъ, разсмотрѣвъ отдѣльно два случая, когда дуги вырѣзковъ 1) соизмѣримы и 2) несоизмѣримы.

Чер. 226.

Теорема 2. *Мѣра площади круговаго вырѣзка (сектора) равняется длинѣ его дуги, помноженной на половину радіуса.*

Означимъ радіусъ круга чрезъ r и мѣру площади сектора AOB чрезъ k; требуется доказать, что $k = \smile AB.\frac{r}{2}$.

Доказ. Пусть мѣра площади круга есть K, длина всей окружности—L. Углу прямому соотвѣтствуетъ длина дуги $\frac{L}{4}$ и секторъ, мѣра котораго $\frac{K}{4}$. По теоремѣ 1-ой имѣемъ:

$$k : \frac{K}{4} = \smile AB : \frac{L}{4},$$

но $K = \pi r^2$ (§ 137) и $L = 2\pi r$ (§ 135); слѣдов.

$$k : \frac{\pi r^2}{4} = \smile AB : \frac{\pi r}{2}, \quad \text{откуда}$$

$$k = \smile AB.\frac{r}{2}.$$

Слѣдствіе. Вырѣзки двухъ какихъ угодно круговъ наз. *подобными*, если ихъ центральные углы равны между собою.

Площади двухъ подобныхъ круговыхъ вырѣзковъ (секторовъ) относятся какъ квадраты радіусовъ. Въ самомъ дѣлѣ, назвавъ буквами k, a и r—мѣру площади одного вырѣзка, дугу его и радіусъ круга, и чрезъ k', a' и r'—соотвѣтствующія величины подобнаго первому другаго вырѣзка, получимъ:

$$k = \frac{ar}{2} \quad \text{и} \quad k' = \frac{a'r'}{2}, \quad \text{откуда}$$

$$\frac{k}{k'} = \frac{ar}{a'r'}.$$

Но длины подобныхъ дугъ a и a' относятся какъ радіусы (§ 136, слѣдствіе), т. е. $\frac{a}{a'} = \frac{r}{r'}$, и слѣдов.

$$\frac{k}{k'} = \frac{r^2}{r'^2}.$$

Задача. *По данной площади вырѣзка и данному радіусу опредѣлить длину дуги его, или по данной площади вырѣзка и данной длинѣ дуги его найти радіусъ.*

Рѣш. Изъ формулы $k = \smile AB.\frac{r}{2}$ (теор. 2) имѣемъ:

$$\smile AB = \frac{2k}{r} \quad \text{и} \quad r = \frac{2k}{\smile AB}.$$

§ 139. **Теорема.** *Площадь круговаго отрѣзка (сегмента) измѣряется произведеніемъ половины радіуса на разность между его дугою и половиною хорды двойной дуги.*

Означимъ длину дуги AB (чер. 227) окружности, которой радіусъ—r, черезъ a, а мѣру площади отрѣзка ABM—черезъ q. Требуется доказать, что

$$q = \frac{r}{2}\left(a - \frac{BB'}{2}\right).$$

Чер. 227.

Доказ. Площадь отрѣзка ABM есть разность между площадью вырѣзка AOBM и площадью △AOB, т. е.

$$q = \text{пл. сект. } AOBM - \text{пл. } \triangle AOB.$$

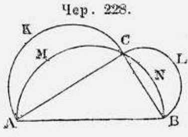
Но пл. сект. $AOBM = a.\frac{r}{2}$; пл. $\triangle AOB = \frac{OA}{2}.BP$ притомъ $OA = r$ и $BP = \frac{BB'}{2}$, а потому пл. $\triangle AOB = \frac{r}{2}.\frac{BB'}{2}$.

Слѣд. $q = a.\frac{r}{2} - \frac{r}{2}.\frac{BB'}{2} = \frac{r}{2}\left(a - \frac{BB'}{2}\right)$.

Замѣчаніе. Если хорда BB' есть сторона одного изъ правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ, сторону котораго можемъ вычислить, то площадь сегмента опредѣлена; въ противномъ же случаѣ, вычисленіе площади сегмента можетъ быть выполнено съ помощью тригонометрическихъ таблицъ.

§ 140. **Теорема.** *Кругъ, построенный на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, равномѣренъ суммѣ круговъ, построенныхъ на катетахъ.*

Принявъ стороны прямоугольнаго △ABC (чер. 228) за діаметры, опишемъ круги и, означивъ мѣру площадей описанныхъ круговъ на AB, AC, BC соотвѣтственно буквами Q, P, R, докажемъ, что Q=P+R.



Чер. 228.

Доказ. Изъ прямоугольнаго треугольника ABC имѣемъ:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

или, помножая на $\frac{\pi}{4}$, получимъ:

$$\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

или

$$Q = P + R.$$

Слѣдствіе. Изъ доказанной теоремы слѣдуетъ, что мѣра площади полукруга AMCNB равняется суммѣ мѣръ полукруговъ AKC и CLB. Отнявъ отъ обѣихъ частей равенства сумму сегментовъ AMC и CNB, получимъ, что

$$\triangle ACB = \text{пл. } AKCM + \text{пл. } CLBN.$$

Части AKCM и CLBN называются *Гипократовыми луночками* (lunulae Hippocratis), и слѣд. *сумма двухъ Гипократовыхъ луночекъ, соотвѣтствующихъ двумъ катетамъ прямоугольнаго треугольника, равна площади этого треугольника.*

Геометрія въ пространствѣ.

ОТДѢЛЪ IX.

Взаимное положеніе прямыхъ въ пространствѣ.

Прямыя пересѣкающіяся и параллельныя. Уголъ двухъ прямыхъ въ пространствѣ.

§ 141. Двѣ прямыя въ пространствѣ, имѣющія одну общую точку, назыв. *пересѣкающимися* прямыми.

Чрезъ такія двѣ прямыя можно всегда провесть только одну плоскость, потому что положеніе двухъ пересѣкающихся прямыхъ опредѣляется точкою ихъ пересѣченія и двумя какими нибудь точками, взятыми на нихъ, а чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провесть только одну плоскость (§ 18). Поэтому пересѣкающіяся прямыя называются лежащими въ одной плоскости.

Если же двѣ прямыя въ пространствѣ на всемъ своемъ продолженіи не имѣютъ общей точки, то онѣ могутъ или лежать въ одной плоскости и тогда такія прямыя назыв. параллельными; или же не лежать въ одной плоскости и тогда онѣ называются *непересѣкающимися и непараллельными прямыми, лежащими въ разныхъ плоскостяхъ*, или, просто, *прямыми, лежащими въ разныхъ плоскостяхъ.*

Итакъ, *параллельными прямыми въ пространствѣ называются прямыя, которыя находятся въ одной плоскости и нигдѣ не встрѣчаются.*

§ 142. **Теорема I.** *Чрезъ точку можно провесть только одну прямую, параллельную данной прямой.*

Пусть въ пространствѣ даны точка A и прямая BC; требуется доказать, что чрезъ эту точку A можно провесть только одну прямую, параллельную прямой BC.

Доказ. Изъ опредѣленія параллельныхъ линій слѣдуетъ, что искомая прямая, проходя чрезъ данную точку A, должна лежать въ одной плоскости съ данной прямой BC. Но чрезъ всякую прямую BC и точку A можно провести только одну плоскость (§ 18), а чрезъ точку A на плоскости можно провести только одну прямую, параллельную прямой BC (§ 43, теор. 2, слѣд. 1), поэтому и въ пространствѣ чрезъ точку A можно провесть только одну прямую, параллельную данной прямой BC.

Теорема 2. *Двѣ прямыя въ пространствѣ, параллельныя третьей прямой, параллельны между собою* (чер. 229).

Пусть три прямыя AB, CD и EF не лежатъ въ одной плоскости, такъ какъ для того случая, когда всѣ три прямыя лежатъ въ одной плоскости, теорема уже была доказана (§ 43, теор. 2, слѣд. 2) и дано CD || AB и EF || AB; требуется доказать, что CD || EF.

Чер. 229.

Доказ. По условію CD || AB и слѣд. эти двѣ прямыя лежатъ въ нѣкоторой плоскости PQ; прямая же EF лежитъ внѣ этой плоскости. Чтобы доказать, что CD || EF, нужно доказать, во первыхъ, что CD и EF лежатъ въ одной плоскости и во вторыхъ, что онѣ не могутъ встрѣтиться.

Предположимъ, что CD и EF не лежатъ въ одной плоскости и проведемъ чрезъ прямую EF и какую нибудь точку x прямой CD плоскость MN. Прямая AB не можетъ встрѣтить эту плоскость MN, потому что по условію AB || EF и слѣдов. AB находится въ одной плоскости съ EF и могла бы встрѣтить плоскость MN только на прямой EF, что невозможно, такъ какъ AB и EF, по условію, параллельны. Плоскость MN пересѣчетъ плоскость PQ въ нѣкоторой прямой yz, проходящей чрезъ точку x. Эта прямая yz будетъ параллельна AB, потому что AB и yz находятся въ той-же плоскости PQ и не могутъ встрѣтиться, такъ какъ прямая

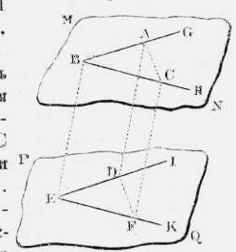
AB не можетъ встрѣтиться съ плоскостью MN. Т. обр. если предположимъ, что CD и EF не лежатъ въ одной плоскости, то чрезъ точку x будутъ проходить двѣ прямыя CD и yz параллельныя AB, что противно предыдущей теоремѣ, слѣдов. сдѣланное предположеніе не вѣрно, а потому прямыя CD и EF лежатъ въ одной плоскости.

Если предположимъ, что прямыя CD и EF, находясь въ одной плоскости, пересѣкутся въ какой нибудь точкѣ, то черезъ эту точку будутъ проведены двѣ прямыя, параллельныя AB, что опять противно предыдущей теоремѣ. Итакъ прямыя CD и EF находятся въ одной плоскости и нигдѣ не встрѣчаются, слѣдов. онѣ параллельны, что и требовалось доказать.

§ 143. **Теорема.** *Два угла со сторонами параллельными, равны, если они однородны, а если разнородны, то составляютъ вмѣстѣ* $2d$.

Пусть ∠GBH (чер. 230) лежитъ на плоскости MN, а однородный съ нимъ другой ∠IEK на плоскости PQ, и дано BG || EI и BH || EK; требуется доказать, что ∠GBH=∠IEK.

Чер. 230.



Доказ. Отложимъ отъ вершинъ на сторонахъ BG и EI равныя части AB и DE, и также на сторонахъ BH и EK равныя части BC и EF; затѣмъ соединимъ прямыми точки B съ E, A съ D и C съ F.

Такъ какъ BH || EK, то четыреугольникъ BCFE лежитъ въ плоскости; сверхъ того изъ равенства и параллельности BC и EF слѣдуетъ, что онъ есть параллелограммъ (§ 58, теор. 3), а потому BE равна и параллельна CF. Подобнымъ образомъ докажемъ, что BE равна и параллельна AD. Далѣе, AD || CF (§ 142, теор. 2) и AD=CF (акс. 1). Изъ равенства и параллельности прямыхъ AD и CF легко доказать по предыдущему равенство и параллельность AC и DF. Если же AB=ED, BC=EF и AC=DF, то △ABC=△DEF (§ 53, теор. 1) и слѣдоват. ∠GBH=∠IEK.

Замѣчаніе. Если разсмотрѣнные углы ABC и DEF

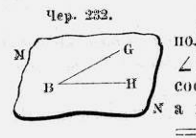
(черт. 231) обращены своими отверстіями въ разныя стороны, то стоитъ только продолжить стороны DE и EF одного изъ этихъ угловъ DEF, чтобы образовать вертикальный ему уголъ xEy и затѣмъ повторить тоже разсужденіе надъ углами ABC и xEy.

Чер. 131.

Пусть $\angle$ GBH (чер. 232) лежитъ на плоскости MN, а разнородный съ нимъ другой уголъ IEK на плоскости PQ, и дано, что BG || IE и BH || KE; требуется доказать, что

$$\angle GBH + \angle IEK = 2d.$$

Чер. 232.

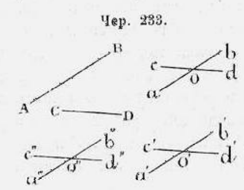


Доказ. Продолжимъ сторону KE и получимъ, что $\angle IEx + \angle IEK = 2d$; но $\angle IEx$ и $\angle GBH$ однородны и имѣютъ соотвѣтственно параллельныя стороны, а потому, по предъидущему, $\angle IEx = \angle GBH$; слѣд. $\angle GBH + \angle IEK = 2d$ (акс. 7).

§ 144. Двѣ непересѣкающіяся и непараллельныя прямыя въ пространствѣ не составляютъ никакого прямолинейнаго угла (§ 141), но чтобы опредѣлить взаимное положеніе такихъ прямыхъ въ пространствѣ условились *угломъ двухъ непересѣкающихся и непараллельныхъ прямыхъ* называть *меньшій изъ смежныхъ угловъ, составляемыхъ прямыми, проведенными изъ какой нибудь точки пространства параллельно двумъ даннымъ прямымъ.*

Такой уголъ для даннаго положенія двухъ непересѣкающихся и непараллельныхъ прямыхъ AB и CD (черт. 233) есть величина постоянная, потому что если возьмемъ гдѣ угодно нѣсколько точекъ O, O′, O″..... въ пространствѣ и проведемъ чрезъ нихъ прямыя ab и cd, $a'b'$ и $c'd'$, $a''b''$ и $c''d''$,...... параллельныя двумъ даннымъ прямымъ, то найдемъ, что при всѣхъ этихъ точкахъ O, O′, O″...... образуются углы со сторонами, соотвѣтственно параллельными между собою (§ 142, теор. 2) и притомъ равные (§ 143).

Чер. 233.



Такъ какъ точка, чрезъ которую проводятъ прямыя, параллельныя непересѣкающимся и непараллельнымъ прямымъ, можетъ быть гдѣ угодно взята, то ее можно взять на одной изъ данныхъ прямыхъ и тогда *угломъ двухъ непересѣкающихся и непараллельныхъ прямыхъ будетъ меньшій изъ смежныхъ угловъ, которые составятся, если чрезъ какуюнибудь точку одной изъ данныхъ прямыхъ проведемъ прямую, параллельную другой данной прямой.*

ОТДѢЛЪ X.

Взаимное положеніе прямыхъ и плоскостей въ пространствѣ.

Прямыя перпендикулярныя, наклонныя и параллельныя къ плоскости.

§ 145. Если прямая не лежитъ на плоскости, то она можетъ или пересѣкать плоскость или не пересѣкать ее, какъ бы ни была далеко продолжена. Прямая, встрѣчающая плоскость, можетъ быть или *перпендикулярна* къ ней или *наклонна*.

Перпендикулярною прямою или *перпендикуляромъ къ плоскости* назыв. прямая, перпендикулярная ко всякой прямой, проведенной на этой плоскости. Всякая другая прямая, не удовлетворяющая сказанному условію и пересѣкающая плоскость, называется *наклонною* къ этой плоскости.

Точка пересѣченія прямой съ плоскостью назыв. *основаніемъ* этой прямой.

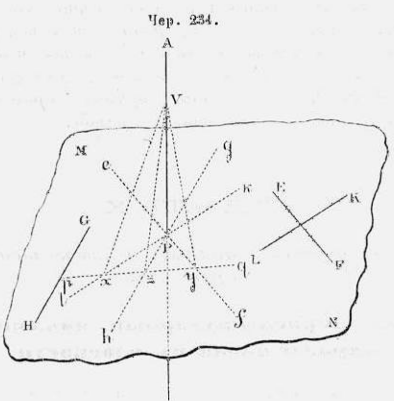
Прямая, которая при всемъ своемъ продолженіи не пересѣкаетъ плоскость, называется прямою, *параллельною* этой *плоскости*.

§ 146. **Теорема 1.** *Прямая, перпендикулярная къ двумъ пересѣкающимся прямымъ, лежащимъ на плоскости, перпендикулярна къ этой плоскости.*

Дано, что прямая AP (чер. 234) перпендикулярна къ двумъ пересѣкающимся прямымъ KL и EF, лежащимъ на плоскости MN; требуется доказать, что прямая AP будетъ перпендикулярна къ плоскости MN, т. е. будетъ перпендику-

лярна ко всякой третьей прямой GH, проведенной гдѣ нибудь на этой плоскости.

Чер. 234.



Доказ. Чрезъ основаніе P прямой AP на плоскости MN параллельно прямымъ KL, EF и GH проведемъ прямыя kl, ef и gh. По § 144 прямая AP перпендикулярна къ прямымъ kl и ef и съ прямою gh составляетъ уголъ, выражающій взаимное положеніе прямыхъ AP и GH; поэтому для доказательства перпендикулярности прямыхъ AP и GH должно доказать перпендикулярность прямой AP къ прямой gh. Для этого чрезъ какую нибудь точку z прямой Ph проведемъ прямую pq такъ, чтобы часть ея xy, лежащая внутри угла lPf, въ z дѣлилась бы пополамъ (§ 86, задача 5). Затѣмъ, соединивъ точки x, y и z съ какою нибудь точкою V перпендикуляра AP, получимъ треугольники Vxy и Pxy, изъ которыхъ имѣемъ (§ 91, теор. I):

$$Vx^2 + Vy^2 = 2Vz^2 + 2xz^2 \quad \text{и}$$
$$Px^2 + Py^2 = 2Pz^2 + 2xz^2$$

Вычитая второе равенство изъ перваго, будемъ имѣть:

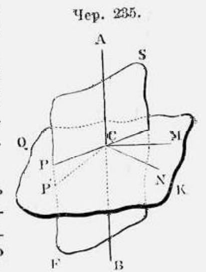
$$Vx^2 - Px^2 + Vy^2 - Py^2 = 2Vz^2 - 2Pz^2, \quad \text{откуда}$$
$$VP^2 = Vz^2 - Pz^2 \quad \text{или} \quad VP^2 + Pz^2 = Vz^2.$$

Послѣднее равенство показываетъ, что $\triangle$ VPz прямоугольный (§ 90, замѣчаніе), въ которомъ VP и Pz суть катеты, слѣдовательно AP перпендикулярна къ gh, а потому и къ GH, что и треб. доказать.

Теорема 2. *Всѣ перпендикуляры къ прямой, возставленные изъ какой нибудь ея точки, лежатъ въ одной плоскости.*

Дано, что изъ точки C прямой AB (чер. 235) возставлено къ этой прямой нѣсколько перпендикуляровъ CM, CN, CP... и т. д.; требуется доказать, что плоскость QK, проходящая чрезъ два изъ этихъ перпендикуляровъ, наприм. CM и CN, пройдетъ и чрезъ всякій третій перпендикуляръ CP, т. е. что всѣ перпендикуляры, возставленные изъ точки C къ прямой AB, лежатъ въ плоскости QK.

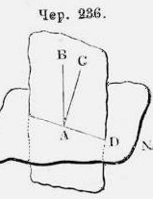
Чер. 235.



Доказ. Предположимъ, что плоскость QK не пройдетъ чрезъ третій перпендикуляръ CP. Проведемъ чрезъ прямую AB и этотъ перпендикуляръ CP другую плоскость SF, которая пересѣчетъ плоскость QK по нѣкоторой прямой CP′. На основаніи предыдущей теоремы прямая AB будетъ перпендикулярна къ прямой CP′ и такимъ образомъ получимъ, что въ одной плоскости ST къ прямой AB изъ одной точки C возставлено два перпендикуляра CP и CP′, что невозможно (§ 35, теор. 1). Слѣдов. третій перпендикуляръ CP также долженъ лежать въ одной плоскости QK съ перпендикулярами CM и CN.

§ 147. **Теорема 1.** *Изъ точки, взятой на плоскости, можно возставить къ этой плоскости только одинъ перпендикуляръ.*

Чер. 236.



Пусть изъ точки A (чер. 236) плоскости MN возставленъ перпендикуляръ AB къ этой плоскости; докажемъ, что другаго перпендикуляра къ плоскости MN изъ той же точки A возставить нельзя.

Доказ. Предположимъ, что можно изъ точки A возставить къ плоскости MN другой перпендикуляръ AC. Проведемъ черезъ эти оба перпендикуляра плоскость,

которая пересѣчетъ данную плоскость по нѣкоторой прямой AD. Прямыя AB и AC перпендикулярны къ линіи AD (§ 145) и лежатъ съ ней въ одной плоскости BAD, что невозможно (§ 35, теор. 1), слѣдов. двухъ перпендикуляровъ къ плоскости изъ точки, взятой на этой плоскости возставить нельзя.

Теорема 2. *Черезъ точку, взятую на прямой можно провесть только одну плоскость, перпендикулярную къ этой прямой.*

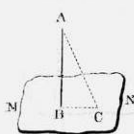
Проведена плоскость MN (чер. 237), перпендикулярная къ прямой AB черезъ ея точку C. Требуется доказать, что чрезъ ту же точку C прямой AB нельзя провесть другую плоскость, перпендикулярную къ той же прямой AB.

Чер. 237.

Доказ. Предположимъ, что чрезъ точку C прямой AB, кромѣ перпендикулярной плоскости MN, можно провести другую плоскость PQ, также перпендикулярную къ AB. Проведемъ чрезъ прямую AB третью плоскость SF; эта плоскость пересѣчетъ плоскость MN по прямой CX, а плоскость PQ по прямой CY. Такъ какъ прямая AB перпендикулярна къ плоскости MN, то она перпендикулярна и къ прямой CX (§ 145). По предположенію прямая AB перпендикулярна также къ плоскости PQ, слѣд. AB перпендикулярна и къ прямой CY. Т. обр. мы имѣемъ въ одной плоскости SF два перпендикуляра CX и CY къ прямой AB изъ одной точки ея C, что невозможно (§ 35, теор. 1). Слѣд. черезъ точку прямой AB нельзя провести болѣе одной плоскости, перпендикулярной къ этой прямой.

§ 148. **Теорема 1.** *Изъ точки, лежащей внѣ плоскости, можно на эту плоскость опустить только одинъ перпендикуляръ.*

Чер. 238.



Пусть изъ точки A (чер. 238), лежащей внѣ плоскости MN, опущенъ перпендикуляръ AB на плоскость MN; требуется доказать, что изъ той же точки A на эту плоскость нельзя опустить другой перпендикуляръ.

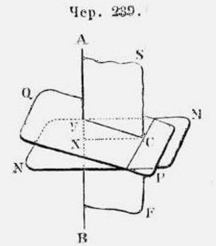
Доказ. Предположимъ, что изъ точки A,

кромѣ перпендикуляра AB, можно опустить на плоскость MN другой перпендикуляръ AC и пусть C есть точка пересѣченія его съ плоскостью MN. Соединимъ прямою BC основанія B и C двухъ перпендикуляровъ AB и AC и замѣтимъ, что эта прямая BC будетъ лежать на плоскости MN (§ 19, теор.). Тогда прямыя AB и AC будутъ перпендикулярны къ прямой BC (§ 145), и т. обр. въ △ABC получимъ два прямыхъ угла, что невозможно. Слѣдов. изъ точки внѣ плоскости можно на эту плоскость опустить только одинъ перпендикуляръ.

Теорема 2. *Чрезъ точку, лежащую внѣ прямой, можно провести только одну плоскость, перпендикулярную къ этой прямой.*

Черезъ точку C (чер. 239) проведена плоскость MN перпендикулярно къ данной прямой AB. Докажемъ, что черезъ ту же точку C нельзя провести другую плоскость, перпендикулярную къ AB.

Чер. 239.



Доказ. Предположимъ, что чрезъ точку C можно провесть другую плоскость PQ, перпендикулярную къ той-же прямой AB. Черезъ прямую AB и точку C проведемъ третью плоскость SF и пусть эта плоскость пересѣчетъ плоскость MN по прямой CX, а плоскость PQ по прямой CY. Такъ какъ прямая AB перпендикулярна къ плоскости MN, то она перпендикулярна къ CX (§ 145), и такъ какъ AB, по предположенію, перпендикулярна къ плоскости PQ, то она будетъ перпендикулярна и къ CY. Т. обр. получили изъ точки C, лежащей внѣ прямой AB, на эту прямую два перпендикуляра CX и CY, что невозможно (§ 36). Слѣдов. черезъ точку внѣ прямой можно провести только одну плоскость, перпендикулярную къ этой прямой.

§ 149. *Длиною перпендикуляра*, опущеннаго изъ данной точки на плоскость, называется та часть перпендикулярной прямой, которая заключается между этою точкою и плоскостью.

Длиною наклонной, проходящей чрезъ данную точку внѣ плоскости, называется часть наклонной, заключающаяся между этой точкой и плоскостью.

Проложеніемъ (проэкціей) *точки* на данную плоскость называв. основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ этой точки на данную плоскость. Напр. проэкція точки A есть P (чер. 240).

Чер. 240.

Проложеніе (проэкція) *прямой опредѣленной длины* на данную плоскость есть прямая, соединяющая основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ концовъ данной прямой на данную плоскость. Напр. проложеніе прямой AB на плоскость MN есть PQ. Изъ этого слѣдуетъ, что проложеніе длины наклонной, проведенной изъ данной точки къ плоскости, есть разстояніе отъ основанія наклонной до основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на эту плоскость. Напр. проложеніе наклонной AB на плоскость MN есть BP (чер. 241).

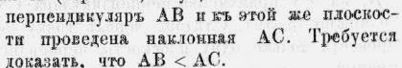
Чер. 241.

Проложеніе перпендикуляра къ плоскости на эту плоскость есть основаніе этого перпендикуляра. Наприм. точка F есть проложеніе перпендикуляра CD.

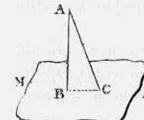
Проложеніе прямой неопредѣленной длины на данную плоскость есть также неопредѣленной длины прямая, проходящая черезъ основанія двухъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какихъ нибудь двухъ точекъ данной прямой на эту плоскость.

§ 150. **Теорема**. *Перпендикуляръ, опущенный изъ точки на плоскость, короче наклонной, проведенной изъ тойже точки къ этой плоскости.*

Пусть изъ точки A (чер. 242) опущенъ на плоскость MN перпендикуляръ AB и къ этой же плоскости проведена наклонная AC. Требуется доказать, что $AB < AC$.



Чер. 242.



Доказ. Соединивъ точки B и C прямою BC, получимъ прямоугольный треугольникъ ABC, въ которомъ катетъ AB менѣе гипотенузы AC, и слѣдов. перпендикуляръ AB короче наклонной AC.

Слѣдствіе. На основаніи этой теоремы *длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки на плоскость, есть крат-*

чайшее разстояніе этой точки отъ плоскости, а потому *разстояніемъ точки отъ плоскости* называется *длина перпендикуляра*, опущеннаго изъ этой точки на плоскость.

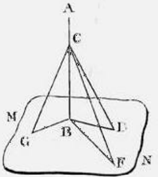
§ 151. **Теорема 1**. Если изъ какой нибудь точки прямой, перпендикулярной къ плоскости, проведемъ наклонныя, то

1) *наклонныя съ равными проложеніями равны* и

2) *наклонная, проложеніе которой больше, длиннѣе.*

Доказ. Пусть изъ точки C (чер. 243), взятой на перпендикулярѣ AB къ плоскости MN, проведены наклонныя CG, CF и CD къ этой плоскости.

Чер. 243.



1) Если $BD = BG$, то $CD = CG$, что слѣдуетъ изъ равенства прямоугольныхъ $\triangle BCD$ и $\triangle BCG$, имѣющихъ по два равныхъ катета (§ 53, теор. 2, слѣдствіе).

2) Если $BF > BD$, то $CF > CD$, что легко обнаружить слѣдующимъ образомъ: $BF > BD$, и слѣд. $BF^2 > BD^2$ или $CF^2 - BC^2 > CD^2 - BC^2$ (§ 89, теор. I, слѣд. 2), откуда $CF > CD$.

Теорема 2, обр. Если изъ какой нибудь точки прямой, перпендикулярной къ плоскости проведемъ наклонныя, то

1) *наклонныя равной длины имѣютъ равныя проложенія,*

2) *наклонная, которая длиннѣе, имѣетъ большее проложеніе.*

Доказ. Пусть изъ точки A перпендикуляра AB къ плоскости MN проведены наклонныя CD, CG и CF къ этой плоскости.

1) Если $CD = CG$, тогда изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ CBD и CBG (§ 53, теор. 3, слѣдствіе) слѣдуетъ, что $BD = BG$.

2) Если $CF > CD$, то $BF > BD$. Въ самомъ дѣлѣ, если $CF > CD$, то $CF^2 > CD^2$ или $BC^2 + BF^2 > BC^2 + BD^2$ (§ 89, теор. I, слѣд. 1), откуда $BF > BD$.

§ 152. **Теорема 1**. *Если двѣ прямыя параллельны и одна изъ нихъ перпендикулярна къ данной плоскости, то и другая прямая также перпендикулярна къ этой плоскости.*

Дано, что $AB \parallel CD$ и $AB \perp MN$ (чер. 244). Требуется доказать, что $CD \perp MN$.

Доказ. Проведемъ черезъ AB и CD плоскость, которая пересѣчетъ данную плоскость по прямой BD. Прямая AB перпендикулярна къ BD (§ 145), а такъ какъ CD параллельна AB,

то и CD перпендикулярна къ BD (§ 43, теор. 2). На плоскости MN черезъ точку D пересѣченія ея съ прямой CD проведемъ прямую EF перпендикулярно къ BD и докажемъ, что CD перпендикулярна не только къ BD, но и къ EF, а слѣд. перпендикулярна и къ плоскости MN (§ 146, теор. 1). Для этого отъ точки D на прямой EF отложимъ въ обѣ стороны произвольныя равныя части $Dx = Dy$ и точки x и y соединимъ съ точкою B и съ какою нибудь точкою Z перпендикуляра AB. Прямыя Bx и By равны, какъ наклонныя съ равными проложеніями (§ 38, теор. 1); изъ равенства же Bx и By слѣдуетъ, что $Zx = Zy$ также какъ наклонныя съ равными проложеніями (§ 151, теор. I), а потому точка Z равноудалена отъ точекъ x и y прямой xy и слѣдовательно она принадлежитъ перпендикуляру, проведенному чрезъ средину D прямой xy (§ 35, слѣд.), т. е. ZD перпендикулярна къ EF. Итакъ EF, будучи перпендикулярна къ BD и ZD, перпендикулярна и къ плоскости, проходящей черезъ прямыя AB и CD (§ 146, теор. I); если же EF перпендикулярна къ этой плоскости, то она перпендикулярна и къ прямой CD (§ 145). Т. обр. прямая CD перпендикулярна къ двумъ прямымъ BD и EF, и слѣдовательно перпендикулярна къ плоскости MN (§ 146. теор. I).

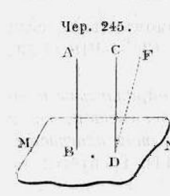
Чер. 244.

Теорема 2, *обр. Двѣ прямыя, перпендикулярныя къ плоскости, параллельны между собою.*

Дано, что AB и CD перпендикулярны къ плоскости MN (чер. 245); требуется доказать, что AB || CD.

Доказ. Положимъ, что прямая CD не параллельна прямой AB; тогда черезъ точку D проведемъ прямую DF, параллельную данной прямой AB. По предыдущей теоремѣ DF будетъ перпендикулярна къ MN; т. обр. получимъ изъ одной точки плоскости MN два перпендикуляра CD и DF къ этой плоскости, что невозможно (§ 147, теор. I).

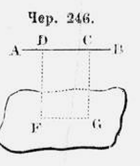
Чер. 245.



§ 153. **Теорема.** *Всѣ точки прямой, параллельной данной плоскости, равно отстоятъ отъ этой плоскости.*

Дано, что прямая AB (чер. 246) параллельна плоскости MN. Доказать, что всѣ перпендикуляры, опущенные изъ точекъ прямой AB на плоскость MN, равны между собою.

Чер. 246.

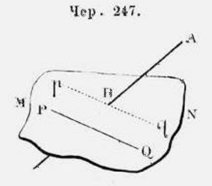


Доказ. Изъ какихъ нибудь точекъ C и D прямой AB (чер. 246) опустимъ перпендикуляры CG и DF на плоскость MN. Эти перпендикуляры параллельны между собою (§ 152, теор. 2) и слѣдов. лежатъ въ одной плоскости. Проведемъ черезъ нихъ плоскость CDFG, которая пересѣчетъ данную плоскость по прямой FG. Прямыя CD и FG параллельны, потому что они находятся въ одной плоскости и не могутъ встрѣтиться,—иначе прямая AB пересѣкалась бы съ параллельною ей плоскостью MN. Если же CD || FG и CG || DF, то CG=DF, какъ противуположныя стороны прямоугольника.

Уголъ прямой съ плоскостью.

§ 154. Наклонная AB (чер. 247) къ плоскости MN образуетъ съ разными прямыми, проведенными на этой плоскости, различные углы. Но уголъ, образуемый наклонною съ какою нибудь прямою, напр. PQ, лежащею гдѣ нибудь на плоскости, равенъ углу, образуемому наклонной съ прямою pq, проведенной на плоскости чрезъ основаніе наклонной B параллельно сказанной прямой PQ (§ 144). Вслѣдствіе этого для разсмотрѣнія угловъ, образуемыхъ наклонною съ разными прямыми, проведенными гдѣ нибудь на плоскости, достаточно разсмотрѣть углы, образуемые наклонною съ прямыми, проведенными на плоскости чрезъ ея основаніе.

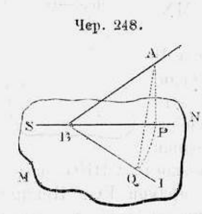
Чер. 247.



Теорема 1. *Уголъ наклонной съ ея проложеніемъ на плоскость меньше всѣхъ угловъ, образуемыхъ наклонной съ каждой изъ прямыхъ, проведенныхъ на этой плоскости.*

Пусть AB (чер. 248) есть наклонная и BP—ея проложеніе на плоскость MN; требуется доказать, что ∠ABP меньше всякаго угла ABI, составленнаго этою наклонною съ какою

нибудь прямою BI, проведенною на плоскости чрезъ основаніе B наклонной.



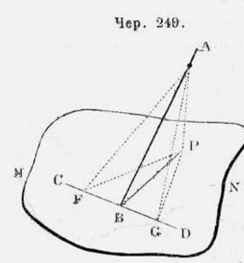
Чер. 248.

Доказ. Пусть P есть проложеніе точки A; отложимъ на BI часть BQ=BP и точку Q соединимъ съ точкою A прямою AQ. Въ треугольникахъ ABP и ABQ сторона AB—общая, BP=BQ, а AP < AQ (§ 150), слѣд. ∠ABP< ∠ABQ (§ 55, теор. 2), что и треб. док.

Слѣдствіе. Если продолжимъ BP, то уголъ ABS, составленный наклонною AB съ этимъ продолженіемъ BS, есть наибольшій изъ всѣхъ разсматриваемыхъ угловъ, какъ смежный наименьшему изъ угловъ.

Теорема 2. *Углы, образуемые наклонной къ плоскости съ прямыми, проведенными на этой плоскости перпендикулярно къ проэкціи наклонной, суть прямые.*

Дана наклонная AB (чер. 249) къ плоскости MN и пусть прямая CD перпендикулярна къ проложенію BP этой прямой AB на плоскость. Требуется доказать, что AB составляетъ прямые углы ABC и ABD съ CD, т. е. AB⊥CD.



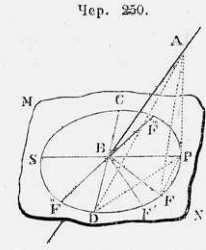
Чер. 249.

Доказ. Отъ основанія наклонной B отложимъ на CD произвольныя равныя части BG=BF и точки G и F соединимъ прямыми AF и AG съ точкою A и прямыми PF и PG съ точкою P.

Такъ какъ точка P лежитъ на перпендикулярѣ BP, возставленномъ изъ средины B прямой FG, то PG=PF (§ 35, теор. 2). Но PG и PF суть проложенія прямыхъ AG и AF на плоскость, а потому AG = AF (§ 151, теор. I), т. е. точка A равноотстоитъ отъ концевъ G и F прямой GF, слѣд. она принадлежитъ перпендикуляру, возставленному изъ средины B прямой FG (§ 35, слѣд.); откуда заключаемъ, что AB перпендикулярна FG, что и треб. док.

§ 155. Пусть дана наклонная AB (чер. 250) къ плоскости

MN и ея проложеніе BP на эту плоскость. Опишемъ на этой плоскости изъ основанія B наклонной AB, какъ центра, радіусомъ, равнымъ проложенію BP—окружность. По теоремѣ I § 154 уголъ ABP есть наименьшій, а уголъ ABS—наибольшій изъ всѣхъ угловъ, образуемыхъ наклонною съ прямыми на плоскости MN. Пусть CD перпендикулярна къ BP, то по теоремѣ 2 § 154 углы ABC и ABD прямые. Если внутри ∠DBP проведемъ изъ точки B какую нибудь прямую, напр. BF, то наклонная составитъ съ нею уголъ ABF—острый. Въ самомъ дѣлѣ, соединимъ точку A съ точками F и D прямыми AF и AD, и точку P съ точками F и D прямыми PF и PD; тогда получимъ, что FP < DP (§ 55, теор. I), т. е. проложеніе прямой AF менѣе проложенія прямой AD, а потому AF < AD (§ 151, теор. I); т. обр. въ треугольникахъ ABF и ABD сторона AB общая, BD = BF и по доказанному AF < AD, слѣд. ∠ABF< ∠ABD (§ 55, теор. 2) т. е. менѣе прямаго угла, или ∠ABF—острый. Подобнымъ образомъ докажемъ, что ∠ABF < ∠ABF′, т. е. съ удаленіемъ прямой BF отъ проложенія наклонной BP уголъ, образуемый ею съ наклонною, возрастаетъ и дѣлается прямымъ, когда BF придетъ въ положеніе BD, перпендикулярное къ BP. Если прямая BF будетъ продолжать двигаться по тому же направленію, то она будетъ составлять тупые углы съ наклонною; такъ, напр. когда прямая BF придетъ въ положеніе BF″, то ∠ABF″—тупой, потому что онъ смежный ∠ABF‴, который, по доказанному, есть острый. Легко видѣть, что этотъ тупой уголъ наклонной съ прямой, проведенной чрезъ ея основаніе на плоскости, будетъ возрастать съ удаленіемъ прямой отъ BD и достигнетъ наибольшей величины, когда прямая совпадетъ съ продолженіемъ BS прямой BP (§154, теор. I, слѣд.). При дальнѣйшемъ движеніи прямой по тому же направленію, тупые углы ея съ наклонной будутъ уменьшаться, потому-что смежные углы, по доказанному, возрастаютъ. Когда прямая придетъ въ положеніе BC, то опять будетъ составлять съ наклонной прямой уголъ. Наконецъ, при движеніи прямой отъ этого положенія до совпаденія съ проложеніемъ наклонной острые углы ея



Чер. 250.

съ наклонной будутъ уменьшаться до наименьшаго угла — угла наклонной съ ея проэкціей.

§ 156. *Угломъ прямой съ плоскостью называется уголъ, составленный этой прямой съ проложеніемъ ея на плоскость.*

По теоремѣ 1 § 154 такой уголъ одинъ; онъ есть наименьшій изъ всѣхъ угловъ, образуемыхъ данной прямой съ какой либо прямой на плоскости.

Если прямая параллельна плоскости, то уголъ ея съ плоскостью равенъ нулю.

ОТДѢЛЪ XI.

Взаимное положеніе плоскостей въ пространствѣ.

Углы двугранные и мѣра ихъ.

§ 157. Двѣ плоскости могутъ пересѣкаться только по одной прямой (§ 18); такія плоскости называются *пересѣкающимися*. Неопредѣленная часть пространства, заключенная между двумя пересѣкающимися плоскостями, назыв. *двуграннымъ угломъ*, а самыя пересѣкающіяся плоскости *сторонами* или *гранями* его; прямая пересѣченія этихъ двухъ плоскостей назыв. *ребромъ* двуграннаго угла. Очевидно, что всякія двѣ пересѣкающіяся плоскости образуютъ четыре двугранные угла. Всякій двугранный уголъ читается четырьмя буквами ABCD (чер. 251), произнося въ срединѣ буквы, стоящія при ребрѣ.

Чер. 251.

Четыре двугранные угла, образуемые двумя пересѣкающимися плоскостями, по аналогіи съ плоскими углами, попарно называются *смежными* и *противуположными*.

Когда два смежные двугранные угла равны между собою, то каждый изъ нихъ назыв. *прямымъ*, а плоскости, образующія его, *перпендикулярными*.

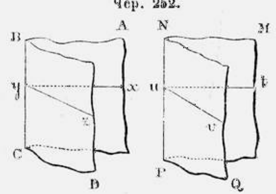
§ 158. Уголъ, составленный перпендикулярами къ ребру, возставленными изъ какой нибудь его точки въ плоскостяхъ двуграннаго угла, назыв. *линейнымъ угломъ* двуграннаго угла. Напр. $\angle XYZ$ есть линейный уголъ двуграннаго угла ABCD.

Для всякаго двуграннаго угла линейный уголъ его есть величина постоянная, потому что всѣ линейные углы, построенные при разныхъ точкахъ ребра, равны между собою, какъ однородные углы со сторонами взаимно параллельными (§ 143).

§ 159. **Теорема 1.** *Двугранные углы равны, когда линейные углы ихъ равны.*

Дано, что линейные углы *xyz* и *tuv* (чер. 252) двугранныхъ угловъ ABCD и MNPQ равны; требуется доказать, что двугранный уголъ ABCD равенъ двугранному углу MNPQ.

Чер. 252.



Доказ. Наложимъ двугранный уголъ MNPQ на двугранный уголъ ABCD такъ, чтобы вершины *u* и *y* линейныхъ угловъ *tuv* и *xyz* и самые эти линейные углы, какъ равные, совмѣстились; тогда ребро NP пойдетъ по ребру BC, потому-что эти ребра перпендикулярны къ плоскостямъ линейныхъ угловъ (§ 146, теор. 1), а изъ точки къ плоскости можно возставить только одинъ перпендикуляръ (§ 147, теор. 1). При этомъ грани совмѣстятся (§ 141); слѣд. двугранные углы тоже совмѣстятся, а потому они равны.

Теорема 2, *обр. Если двугранные углы равны, то и линейные углы ихъ также равны.*

Дано, что двугранный уголъ ABCD равенъ двугранному углу MNPQ; требуется доказать, что линейные углы *tuv* и *xyz* этихъ двугранныхъ угловъ также равны.

Доказ. Наложимъ двугранный уголъ MNPQ на двугранный уголъ ABCD такъ, чтобы вершина линейнаго угла *tuv* упала въ вершину линейнаго угла *xyz*, ребро NP на ребро BC и грань MNP на грань ABC, тогда перпендикуляръ *ut* пойдетъ по перпендикуляру *yx* (§ 35, теор. 1); затѣмъ, по равенству двугранныхъ угловъ ABCD и MNPQ, плоскость NPQ совмѣстится съ плоскостью BCD и перпендикуляръ *uv*

сольется съ перпендикуляромъ yz (§ 35, теор. I). Итакъ, линейные углы xyz и tuv совмѣстились, слѣд. они равны.

Слѣдствіе Изъ послѣднихъ двухъ теоремъ слѣдуетъ:

1) *Прямому двугранному углу соотвѣтствуетъ прямой линейный уголъ,* потому что прямымъ двуграннымъ угломъ называется одинъ изъ двухъ равныхъ смежныхъ двугранныхъ угловъ, а прямымъ линейнымъ одинъ изъ двухъ равныхъ смежныхъ линейныхъ угловъ; если двугранный уголъ прямой, то онъ равенъ своему смежному, и по доказанной теоремѣ линейные ихъ углы равны, которые также суть углы смежные, а потому каждый изъ нихъ есть также прямой.

2) *Прямому линейному углу соотвѣтствуетъ и двугранный уголъ прямой,* что легко доказать, разсуждая какъ въ 1-мъ слѣдствіи.

3) *Всѣ прямые двугранные углы равны между собою,* потому что ихъ линейные углы равны.

4) *Сумма смежныхъ двугранныхъ угловъ равна двумъ прямымъ двуграннымъ угламъ.*

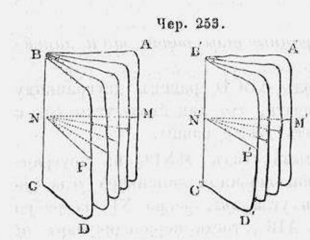
5) *Вертикальные двугранные углы равны.*

§ 160. **Теорема.** *Двугранные углы относятся между собою какъ ихъ линейные.*

Пусть даны двугранные углы ABCD и A′B′C′D′ (чер. 253), которыхъ линейные углы соотвѣтственно суть MNP и M′N′P′; требуется доказать, что

$$\frac{\text{двуг. уг. ABCD}}{\text{двуг. уг. A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'} = \frac{\angle \text{MNP}}{\angle \text{M}'\text{N}'\text{P}'}$$

Чер. 253.



Доказ. Здѣсь можетъ быть два случая: 1) линейные углы соизмѣримы и 2) линейные углы несоизмѣримы.

1-й случай. Пусть линейные углы MNP и M′N′P′ имѣютъ общей мѣрой уголъ a и пусть этотъ уголъ a уложится въ углѣ MNP — m разъ, а въ углѣ M′N′P′ — n разъ такъ, что

$$\angle \text{MNP} = ma \quad \text{и} \quad \angle \text{M}'\text{N}'\text{P}' = na.$$

Если раздѣлимъ первое равенство на второе, то получимъ:

$$\frac{\angle \text{MNP}}{\angle \text{M}'\text{N}'\text{P}'} = \frac{m}{n} \ldots\ldots (1)$$

Проведемъ плоскости въ каждомъ изъ двугранныхъ угловъ черезъ его ребро и прямыя, дѣлящія соотвѣтствующій ему линейный уголъ на части, равныя углу a; тогда найдемъ, что двугранный уголъ ABCD раздѣлится на m, а двугранный уголъ A′B′C′D′ на n двугранныхъ угловъ равныхъ между собою, потому что всякій изъ этихъ двугранныхъ угловъ имѣетъ своимъ линейнымъ угломъ — уголъ a, (§ 159, теор. I). Итакъ, означивъ чрезъ q — двугранный уголъ, соотвѣтствующій линейному углу a, получимъ:

$$\text{двугр. уг. ABCD} = mq$$
$$\text{двугр. уг. A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}' = nq.$$

Раздѣливъ первое равенство на второе, получимъ:

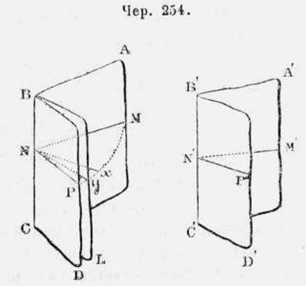
$$\frac{\text{двуг. уг. ABCD}}{\text{двуг. уг. A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'} = \frac{m}{n} \ldots\ldots (2).$$

Если сравнимъ (1) и (2) пропорціи, то найдемъ (акс. 1):

$$\frac{\text{двуг. уг. ABCD}}{\text{двуг. уг. A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'} = \frac{\angle \text{MNP}}{\angle \text{M}'\text{N}'\text{P}'}.$$

2-й случай. Линейные углы MNP и M′N′P′ (чер. 254) данныхъ двугранныхъ угловъ ABCD и A′B′C′D′ несоизмѣримы. Докажемъ, что и въ этомъ случаѣ отношеніе двугранныхъ угловъ не можетъ быть ни болѣе, ни менѣе отношенія ихъ линейныхъ угловъ. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что отношеніе двугранныхъ угловъ напр. менѣе отношенія соотвѣтствующихъ линейныхъ угловъ, т. е. что

Чер. 254.



$$\frac{\text{двуг. уг. ABCD}}{\text{двуг. уг. A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'} < \frac{\angle \text{MNP}}{\angle \text{M}'\text{N}'\text{P}'}.$$

Чтобы второе отношеніе приравнять первому, уменьшимъ числитель втораго отношенія и выберемъ такой уголъ MNx, меньшій угла MNP, чтобы

$$\frac{\text{двуг. уг. } ABCD}{\text{двуг. уг. } A'B'C'D'} = \frac{\angle MNx}{\angle M'N'P'} \ldots\ldots (2).$$

Раздѣлимъ $\angle M'N'P'$ на равные углы, изъ которыхъ каждый былъ бы менѣе $\angle PNx$, и одинъ изъ этихъ равныхъ угловъ будемъ откладывать въ $\angle MNP$ отъ стороны его MN, тогда по крайней мѣрѣ одна изъ сторонъ откладываемаго угла упадетъ внутри угла PNx, напр. по прямой Ny. Проведемъ плоскость черезъ ребро BC и прямую Ny и получимъ двугранный уголъ ABCL, котораго линейный уголъ MNy будетъ соизмѣримъ съ линейнымъ угломъ $M'N'P'$ (потому что общая мѣра ихъ есть одинъ изъ равныхъ вышеупомянутыхъ угловъ). Тогда по 1-му случаю имѣемъ:

$$\frac{\text{двуг. уг. } ABCL}{\text{двуг. уг. } A'B'C'D'} = \frac{\angle MNy}{\angle M'N'P'} \quad (3).$$

Раздѣливъ пропорцію (2) на (3), получимъ пропорцію:

$$\frac{\text{двуг. уг. } ABCD}{\text{двуг. уг. } ABCL} = \frac{\angle MNx}{\angle MNy}$$

что невозможно, потому что $\frac{\text{двуг. уг. } ABCD}{\text{двуг. уг. } ABCL} > 1$,

а $\frac{\angle MNx}{\angle MNy} < 1$. Слѣд. невозможно допустить, чтобы отношеніе двугранныхъ угловъ было менѣе отношенія ихъ линейныхъ угловъ.

Подобнымъ образомъ докажемъ, что отношеніе двугранныхъ угловъ не можетъ быть болѣе отношенія ихъ линейныхъ угловъ. Слѣдов. (акс. 9)

$$\frac{\text{двуг. уг. } ABCD}{\text{двуг. уг. } A'B'C'D'} = \frac{\angle BNP}{\angle M'N'P'}.$$

Если за единицу мѣры двугранныхъ угловъ примемъ двугранный уголъ, который имѣетъ линейнымъ угломъ единицу мѣры линейныхъ угловъ, наприм. уголъ въ 1^0, то двугранный уголъ выразится тѣмъ же самымъ числомъ, какимъ выразится соотвѣтствующій ему линейный уголъ.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что линейный уголъ $M'N'P'$ есть единица мѣры линейныхъ угловъ, напр. уголъ въ 1^0, то, принимая двугранный уголъ $A'B'C'D'$ за единицу мѣры двугранныхъ угловъ, замѣтимъ, что отношеніе

$$\frac{\text{двуг. уг. } ABCD}{\text{двуг. уг. } A'B'C'D'}$$

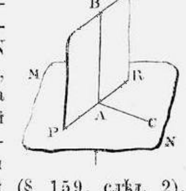
есть число, выражающіе сколько въ двугранномъ углѣ ABCD заключается единицъ двугранныхъ угловъ, а отношеніе $\frac{\angle MNP}{\angle M'N'P'}$, есть число, выражающее, сколько въ линейномъ углѣ заключается единицъ линейныхъ угловъ. По доказанной теоремѣ эти отношенія равны и слѣд. при принятыхъ единицахъ мѣры двугранный уголъ выразится тѣмъ же самымъ числомъ, какимъ числомъ выразится соотвѣтствующій ему линейный.

Плоскости перпендикулярныя.

§ 161. **Теорема 1**. *Плоскость, проходящая черезъ прямую перпендикулярную къ другой плоскости, перпендикулярна къ этой послѣдней.*

Дано, что прямая AB (чер. 255) перпендикулярна къ MN; требуется доказать, что всякая плоскость PQ, проведенная черезъ прямую AB, перпендикулярна къ плоскости MN.

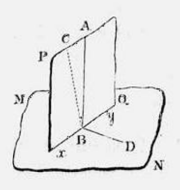
Чер. 255.



Доказ. Пусть прямая PR есть пересѣченіе данной плоскости MN съ плоскостью PQ. Проведемъ на плоскости MN прямую AC перпендикулярную къ PR, тогда AB будетъ также перпендикулярна къ AC (§ 145), а потому $\angle BAC$ прямой и вмѣстѣ съ тѣмъ есть линейный двуграннаго угла QPRN (§ 158). Слѣд. и двугранный уголъ QPRN также прямой (§ 159, слѣд. 2), т. е. плоскость QP перпендикулярна къ плоскости MN.

Теорема 2. *обр. Перпендикуляръ, возставленный изъ точки прямой пересѣченія двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей къ одной изъ этихъ плоскостей, лежитъ въ другой плоскости.*

Чер. 256.



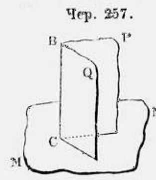
Даны двѣ взаимно перпендикулярныя плоскости MN и PQ (чер. 256) и изъ какой-нибудь точки B прямой пересѣченія ихъ xy возставленъ перпендикуляръ AB къ плоскости MN; требуется доказать, что этотъ перпендикуляръ AB лежитъ въ другой плоскости PQ.

Доказ. Предположимъ, что перпендикуляръ AB не лежитъ въ плоскости PQ; тогда, возставя изъ точки B къ прямой xy одинъ перпендикуляръ BC въ плоскости PQ и другой BD въ плоскости MN, найдемъ, что $\angle$ CBD прямой (§ 159, слѣд. I) а потому перпендикуляръ BC, будучи перпендикуляренъ къ двумъ прямымъ xy и BD, лежащимъ на плоскости MN, будетъ перпендикуляренъ и къ плоскости MN (§ 146, теор. I). Т. обр. изъ одной точки B на плоскости MN къ этой плоскости возставлено два перпендикуляра AB и CB, что невозможно (§ 147, теор. 1). Слѣд. прямая AB лежитъ въ плоскости PQ.

§ 162. **Теорема**. *Прямая пересѣченія двухъ пересѣкающихся плоскостей, перпендикулярныхъ къ третьей плоскости, перпендикулярна къ этой послѣдней.*

Дано, что двѣ пересѣкающіяся плоскости PC и QC (чер. 257) перпендикулярны къ плоскости MN; требуется доказать, что прямая пересѣченія BC плоскостей PC и QC перпендикулярна къ плоскости MN.

Чер. 257.



Доказ. Изъ основанія C прямой BC возставимъ перпендикуляръ къ плоскости MN. Этотъ перпендикуляръ, по предыдущей теоремѣ, долженъ лежать какъ въ плоскости PC, такъ и въ плоскости QC, слѣдов. сливаться съ ихъ пересѣченіемъ, т. е. пересѣченіе BC плоскостей PC и QC перпендикулярно къ плоскости MN.

Плоскости параллельныя.

§ 163. *Параллельными плоскостями въ пространствѣ называются плоскости, которыя не пересѣкаются, сколько бы ихъ ни продолжали.* Изъ этого опредѣленія имѣемъ:

Слѣдствіе 1. *Прямыя пересѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей съ третьей плоскостью параллельны между собою*, потому что онѣ лежатъ въ одной плоскости и не могутъ пересѣчься, находясь въ параллельныхъ плоскостяхъ (§ 118).

Слѣствіе 2. *Отрѣзки параллельныхъ прямыхъ между параллельными плоскостями равны*, потому что плоскость, въ которой лежатъ параллельные отрѣзки (§ 141), пересѣчетъ

данныя параллельныя плоскости по прямымъ параллельнымъ (слѣд. 1), а потому данные отрѣзки равны какъ противуположныя стороны параллелограмма (§ 58, теор. 1).

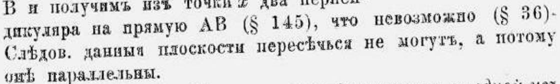
Слѣдствіе 3. *Всѣ точки одной изъ двухъ параллельныхъ плоскостей равноотстоятъ отъ другой плоскости*, потому что перпендикуляры, опущенные изъ какихъ нибудь двухъ точекъ одной плоскости на другую, параллельны между собою (§ 152, теор 2) и слѣдовательно равны (слѣдствіе 2).

§ 164. **Теорема 1.** *Двѣ плоскости параллельны между собою, если онѣ перпендикулярны къ одной и той же прямой.*

Даны двѣ плоскости MN и PQ, перпендикулярныя къ прямой AB (чер. 258); требуется доказать, что плоскости MN и PQ параллельны между собою.

Чер. 258.

Доказ. Предположимъ, что данныя плоскости пересѣклись по нѣкоторой прямой yz; тогда какую нибудь точку x этой прямой соединимъ съ точками A и B и получимъ изъ точки x два перпендикуляра на прямую AB (§ 145), что невозможно (§ 36). Слѣдов. данныя плоскости пересѣчься не могутъ, а потому онѣ параллельны.



Теорема 2, *обр. Прямая, перпендикулярная къ одной изъ двухъ параллельныхъ между собою плоскостей, — перпендикулярна къ другой.*

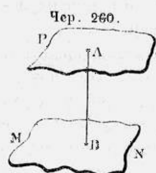
Пусть плоскости MN и PQ (чер. 259) параллельны между собою и прямая AB перпендикулярна къ плоскости MN. Требуется доказать, что AB перпендикулярна къ плоскости PQ.

Чер. 259.

Доказ. Проведемъ черезъ прямую AB двѣ плоскости GF и RK; сѣченія EF и GH, а также IK и RS этихъ плоскостей съ данными параллельными плоскостями MN и PQ соотвѣтственно параллельны (§ 163, слѣд. 1). Такъ какъ AB перпендикулярна къ EF и IK (§ 145), то AB также перпендикулярна къ GH и RS (§ 43, теор. 2). Слѣд. AB перпендикулярна къ плоскости PQ (§ 146, теор. 1).

Слѣдствіе 1. *Черезъ данную точку въ пространствѣ можно провести только одну плоскость параллельную данной плоскости*, потому что если изъ данной точки A (чер. 260) опустимъ перпендикуляръ AB на данную плоскость MN, то плоскость PQ, параллельная MN, будетъ перпендикулярна къ прямой AB (теорема 2); а черезъ точку на прямой можно провести только одну плоскость перпендикулярную къ этой прямой (§ 147, теор. 2).

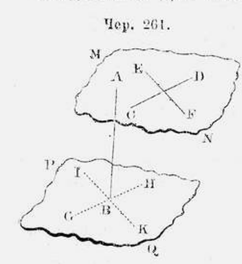
Чер. 260.



Слѣдствіе 2. *Двѣ плоскости, параллельныя третьей, параллельны между собою*, потому что еслибы эти двѣ плоскости пересѣклись, т. е. имѣли бы общую прямую, а слѣд. и одну общую точку, то черезъ эту точку проходили бы двѣ плоскости, параллельныя третьей данной плоскости, что невозможно (слѣдствіе 1).

Слѣдствіе 3. *Двѣ плоскости* MN *и* PQ (чер. 261) *параллельны, если двѣ пересѣкающіяся прямыя* EF *и* CD, *лежащія на одной плоскости, соотвѣтственно параллельны двумъ пересѣкающимся прямымъ* IK *и* GH, *лежащимъ на другой*, потому что перпендикуляръ AB, опущенный изъ точки B пересѣченія прямыхъ IK и GH на плоскость MN, перпендикуляренъ къ прямымъ EF и CD (§ 145), слѣдов. образуетъ прямые углы и съ прямыми IK и GH (§ 144), т. е. AB перпендик. къ плоскости PQ (§ 146, теор. 1).

Чер. 261.



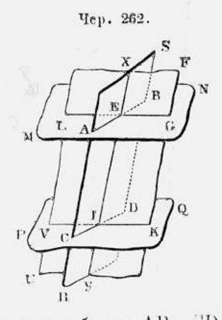
§ 165. Если двѣ параллельныя плоскости пересѣчемъ третьей плоскостью, то образуется восемь двугранныхъ угловъ. Этимъ угламъ даютъ три рода названій, разсматривая ихъ попарно (подобно тому какъ въ плоской Геометріи при пересѣченіи двухъ параллельныхъ прямыхъ третьей), а именно: углы на крестъ лежащіе, соотвѣтственные и односторонніе.

Теорема. *Если двѣ параллельныя плоскости пересѣчены третьей, то*

1) *накрестъ лежащіе двугранные углы равны;*
2) *соотвѣтственные двугранные углы равны;*
3) *сумма двухъ одностороннихъ угловъ равна двумъ прямымъ двуграннымъ угламъ.*

Доказ. Пусть плоскости MN и PQ параллельны (чер. 262) между собою и разсѣчены плоскостію RS; тогда сѣченія AB и CD параллельны между собою (§ 163, слѣд. 1). Чрезъ к. н. точку E прямой AB проведемъ плоскость FU, перпендикулярную къ этой прямой. Эта плоскость будетъ перпендикулярна къ прямой CD (§ 152, теор. 1) и пересѣчетъ плоскости MN и PQ по параллельнымъ между собою прямымъ LG и VK, а плоскость RS по прямой XY. Параллельныя прямыя LG и VK образуютъ съ прямой XY восемь угловъ, которые суть линейные углы восьми двугранныхъ угловъ при ребрахъ AB и CD (§ 158). Такъ какъ линейные углы 1) на крестъ лежащіе равны 2) соотвѣтственные равны между собою, то и двугранные углы тѣхъ же наименованій также равны. Такъ какъ линейные углы, лежащіе по одну сторону сѣкущей прямой, составляютъ два прямыхъ угла, то двугранные углы тѣхъ же наименованій даютъ въ суммѣ два прямыхъ двугранныхъ угла.

Чер. 262.



Замѣчаніе. Теорема обратная сейчасъ доказанной теоремѣ справедлива только тогда, когда ребра двугранныхъ угловъ будутъ параллельны.

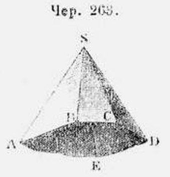
ОТДѢЛЪ XII.

Тѣлесные углы.

Трегранные и многогранные углы.

§ 166. Неопредѣленная часть пространства, ограниченная тремя или болѣе плоскостями, пересѣкающимися въ одной точкѣ, называется *многограннымъ* или *тѣлеснымъ угломъ*. Точка S, въ которой плоскости ASB, BSC, и т. д. (чер. 263) сходятся, наз. *вершиною* многограннаго угла, а самыя плоскости ASB, BSC... *гранями* или *плоскими углами* его; прямыя пересѣченія граней

Чер. 263.



SA, SB, SC наз. *ребрами* многограннаго угла. Многогранный уголъ означается или одною буквою S, стоящею при вершинѣ, или этою буквою съ присоединенiемъ буквъ, стоящихъ на ребрахъ,— SABCDE. Если многогранный уголъ составленъ тремя гранями, то онъ назыв. *трегранным*, если четырьмя — *четырегранным*, и т. д.

§ 167. **Теорема**. *Въ трегранномъ углѣ всякiй плоскiй уголъ менѣе суммы двухъ другихъ плоскихъ угловъ.*

Положимъ, что наибольшiй изъ трехъ плоскихъ угловъ даннаго трегранного угла S (чер. 264) есть уголъ ASB и докажемъ, что

Чер. 264.

$$\angle ASB < \angle ASC + \angle BSC.$$

Доказ. Отложивъ въ $\angle ASB$ уголъ $ASK = \angle ASC$, а на ребрѣ SC и прямой SK равныя части SD и SE, проведемъ чрезъ точки D и E какую нибудь плоскость PQ, которая пусть пересѣчетъ грани трегран. угла по прямымъ GF, FD и DG. Изъ $\triangle GFD$ имѣемъ:

$$GF < GD + DF \quad (§ 46)$$

или $GE + EF < GD + DF$.

Въ этомъ неравенствѣ $GE = GD$, потому что, по § 53 теор. 1, $\triangle GSE = \triangle GSD$. Отнявъ равныя части GE и GD отъ обѣихъ частей неравенства, получимъ: $EF < DF$.

Изъ треугольниковъ ESF и DSF, имѣющихъ по двѣ стороны равныя и по неравной третьей сторонѣ, имѣемъ, что

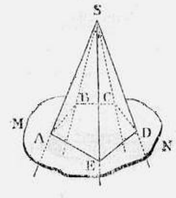
$$\angle ESF < \angle DSF \quad (§ 55, \text{ теор. } 2).$$

Придавъ къ первой части послѣдняго неравенства $\angle GSE$, а ко второй равный ему $\angle GSD$ найдемъ:

$$\angle GSE + \angle ESF < \angle GSD + \angle DSF \quad \text{или}$$

$$\angle ASB < \angle ASC + \angle BSC.$$

Чер. 265.



§ 168. **Теорема.** *Во всякомъ многогранномъ углѣ сумма плоскихъ угловъ, составляющихъ его, менѣе 4d.*

Доказ. Проведемъ плоскость MN (чер. 265), которая пересѣчетъ всѣ ребра даннаго многограннаго угла въ какихъ нибудь точкахъ A, B, C, D, E, и означимъ сумму плоскихъ угловъ этого многограннаго угла через S, а число ихъ черезъ *n*. При точкахъ A, B, C, D, E получимъ трегранные углы, въ которыхъ по предъидущей теоремѣ имѣемъ, что

$$\angle ABC < \angle ABS + \angle CBS$$
$$\angle BCD < \angle BCS + \angle DCS$$
$$\angle CDE < \angle CDS + \angle EDS$$
$$\dots\dots\dots$$

Сложивъ эти неравенства, получимъ:

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDE + \ldots < \angle ABS + \angle CBS + \angle BCS + \\ + \angle DCS + \angle CDS + \angle EDS + \ldots$$

Первая часть этого неравенства

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDE + \ldots = 2d(n-2) \quad (§ 63, \text{ теор. } 1);$$

вторая же часть неравенства выражаетъ сумму угловъ $\triangle ABS$, $\triangle BSC, \ldots$, равную $2dn$ безъ суммы угловъ при ихъ вершинахъ, которую означили буквою S; поэтому

$$\angle ABC + \angle CBS + \angle BCS + \angle DCS + \angle CDS + \angle EDS + \ldots = \\ = 2dn - S.$$

Такимъ образомъ неравенство приметъ видъ:

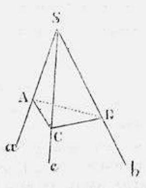
$$2d\ (n-2) < 2dn - S, \text{ откуда } S < 4d.$$

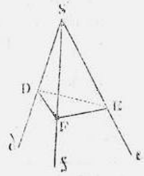
Равенство трегранныхъ угловъ.

§ 169. **Теорема I.** *Два трегранные угла равны, если всѣ три плоскiе ихъ угла соотвѣтственно равны и одинаково расположены.*

Дано, что въ двухъ трегран. углахъ S и S′ (чер. 266) плоскiе ихъ углы соотвѣтственно равны и одинаково расположены, т. е. $\angle aSc = \angle dS'f$, $\angle aSb = \angle dS'e$ и $\angle cSb = \angle fS'e$; докажемъ, что трегранный уголъ S равенъ трегранному углу S′, т. е. что эти углы при наложенiи совмѣстятся.

Чер. 266.





Доказ. Отложивъ на соотвѣтственныхъ ребрахъ aS и dS' равныя части AS и DS′, проведемъ чрезъ точку A плоскость

перпендикулярную къ ребру aS, которая пересѣчетъ грани трегранного угла S по прямымъ AB, AC и BC, и чрезъ точку D проведемъ плоскость, перпендикулярную къ ребру dS, которая пересѣчетъ грани трегранного угла S' по прямымъ DE, DF и FE. $\angle BAC$ и $\angle EDF$ суть линейные углы двугранныхъ угловъ $bSac$ и $eS'df$; докажемъ теперь, что $\angle BAC = \angle EDF$. Въ самомъ дѣлѣ, $\triangle ASC = \triangle DS'F$ и $\triangle ASB = \triangle DS'E$ (§ 53, теор. 4, слѣд. 2), откуда слѣдуетъ, что $AC = DF$, $SC = S'F$ и $AB = DE$, $SB = S'E$. Также $\triangle CBS = \triangle FES'$ (§ 53, теор. 2) и потому $BC = EF$. Т. образомъ $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ равны (§ 53, теор. I), слѣд. $\angle BAC = \angle EDF$, а потому двуг. уг. $bSac =$ двуг. уг. $eS'df$ (§ 159, теор. I). Изъ равенства этихъ двухъ угловъ, а также равенства и одинаковаго расположенія плоскихъ угловъ aSb и $dS'e$, aSc и $dS'f$, слѣдуетъ, что S и S' при наложеніи совмѣстятся.

Если бы одно ребро трегранного угла было перпендикулярно къ грани, которая проходитъ черезъ другія два ребра, то плоскость, проведенная перпендикулярно къ нему, была бы параллельна вышесказанной грани и не пересѣкла бы ее, поэтому предложенное доказательство не годилось бы, но тогда уголъ, составленный двумя другими ребрами, будетъ линейнымъ угломъ двугранного угла, имѣющаго своимъ ребромъ сказанное ребро.

Теорема 2. *Два трегранные угла равны, если имѣютъ по ровному двугранному углу, заключенному между двумя соотвѣтственно равными и одинаково расположенными плоскими углами.* Потому что при наложеніи такіе трегранные углы совмѣстятся.

Теорема 3. *Два трегранные угла равны, если имѣютъ по равному плоскому углу, заключенному между двумя соотвѣтственно равными и одинаково расположенными двугранными углами.* Потому что при наложеніи эти трегранные углы совмѣстятся.

Теорема 4 *Трегранные углы равны, если двугранные углы одного порознь равны двуграннымъ другаго и притомъ грани трегранныхъ угловъ одинаково расположены.*

Пусть въ двухъ трегранныхъ углахъ S и S' (чер. 267) грани расположены одинаково и двугранные углы при ребрахъ SK, SL и SM соотвѣтственно равны двуграннымъ угламъ при ребрахъ $S'K'$, $S'L'$ и $S'M'$. Требуется доказать, что $S = S'$.

Доказ. Возьмемъ внутри трегранного угла S гдѣ нибудь точку O

и проведемъ чрезъ нее[1] перпендикулярно къ ребрамъ SK, S*L* и SM три плоскости PR, PQ и RQ, которыя ограничатъ собою трегранный уголъ O. Докажемъ, что ребра угла O перпендикулярны къ гранямъ даннаго угла S, напр. ребро OP перпендикулярно къ грани KSL; въ самомъ дѣлѣ, грань KSL проходитъ чрезъ ребро KS и потому перпендикулярна къ грани PR (§ 161, теор. 1), проходитъ также чрезъ ребро SL и потому перпендикулярна къ грани PQ (§ 161, теор. 1), слѣд. грань KSL перпендикулярна къ ребру OP (§ 162). Т. обр. трегранные углы S и O таковы, что грани одного перпендикулярны къ ребрамъ другаго. Такъ какъ ребро SK угла S перпендикулярно къ грани PR угла O, то $\angle PAR$ есть линейный двуграннаго угла при ребрѣ SK (§ 146, теор. I и § 158) и служитъ дополненіемъ до $2d$ къ плоскому углу ROP угла O, потому что въ четыреугольникѣ OPAR углы APO и ARO—прямые (§ 56, теор. I). Точно также докажемъ, что $\angle QCP$ и $\angle RBQ$ суть линейные углы двугранныхъ угловъ при ребрахъ SL и SM и что они служатъ соотвѣтственно дополненіемъ до $2d$ къ плоскимъ угламъ POQ и QOR трегранного угла O.

Чер. 267.

Такъ какъ ребро OP угла O перпендикулярно къ грани KSL, то $\angle APC$ есть линейный уголъ двуграннаго угла при ребрѣ OP и служитъ дополненіемъ до $2d$ къ плоскому углу KSL трегранного угла S, потому что въ четыреугольникѣ SAPC углы SAP и SCP прямые (§ 56, теор. I). Точно также докажемъ, что $\angle ARB$ и $\angle BQC$ суть линейные углы двугранныхъ угловъ при ребрахъ OR и OQ и что они служатъ соотвѣтственно дополненіемъ до $2d$ къ плоскимъ угламъ KSM и LSM трегранного угла S.

Т. обр. трегранные углы O и S таковы, что плоскіе углы одного изъ нихъ служатъ дополненіями до $2d$ къ линейнымъ соотвѣтствующихъ двугранныхъ угловъ другаго.

Теперь возьмемъ внутри трегранного угла S' гдѣ нибудь точку O', построимъ при этой точкѣ трегранный уголъ O', котораго плоскости перпендикулярны къ ребрамъ угла S, и опять докажемъ, что ребра одного изъ этихъ трегранныхъ угловъ перпендикулярны къ гранямъ другаго и линейные углы двугранныхъ одного изъ нихъ служатъ дополненіемъ до $2d$ къ соотвѣтствующимъ плоскимъ угламъ другаго.

По условію двугранные углы трегранныхъ угловъ S и S' равны и одинаково расположены, слѣдов. ихъ линейные также равны, а потому и плоскіе углы трегранныхъ угловъ O и O' соотвѣтственно равны, какъ дополненія до $2d$ къ линейнымъ; откуда слѣдуетъ, что трегранные углы O и O' равны. Если же трегранный уголъ O равенъ трегранному O', то двугранные и ихъ линейные соотвѣтственно равны, а потому и плоскіе углы трегранныхъ угловъ S и S', какъ дополне-

нія до $2d$ къ сказаннымъ линейнымъ угламъ, также соотвѣтственно равны и одинаково расположены, слѣд. и трегранные углы S и S′ равны между собою.

Замѣчаніе. Возьмемъ трегранный уголъ SABC (чер. 268) и продолжимъ его ребра; тогда по другую сторону вершины S опредѣлится новый трегранный уголъ SA′B′C′. Плоскіе углы этихъ трегранныхъ угловъ равны между собою (§ 33, теор. I), но не одинаково расположены, и потому эти трегранные углы совмѣстить нельзя, не смотря на то, что двугранные углы равны BSAC=B′SA′C′, ASBC=A′SB′C′, ASCB=A′SC′B′. Такіе трегранные углы назыв. *симметричными*. Итакъ, *два трегранные угла назыв. симметричными, если ихъ части*, т. е. плоскіе и двугранные углы, *соотвѣтственно равны, но не одинаково расположены*.

Чер. 268.

ОТДѢЛЪ XIII.

Многогранники: призма, пирамида и правильные многогранники.

О многогранникахъ вообще.

§ 170. *Многогранникъ есть геометрическое тѣло*, ограниченное со всѣхъ сторонъ пересѣкающимися плоскостями. Эти плоскости, взаимно пересѣкаясь, образуютъ геометрическія фигуры; стороны такихъ фигуръ назыв. *ребрами* многогранника, а вершины —*вершинами* многогранника; площади же, ограниченныя этими фигурами, назыв. *гранями* или *сторонами* многогранника. Прямая, соединяющая всякія двѣ, не лежащія на одной грани вершины многогранника, назыв. *діагональю* многогранника.

Плоскость, проходящая чрезъ два ребра, не лежащія на одной грани, назыв. *діагональною плоскостью*.

Простѣйшій изъ многогранниковъ есть многогранникъ, ограниченный четырьмя сторонами, потому что тремя плоскостями нельзя ограничить пространства.

Многогранники носятъ названія, зависящія отъ числа сторонъ, ихъ ограничивающихъ, напр. многогранникъ, ограниченный пятью сторонами, назыв. пятигранникомъ. Многогранники обозначаются или всѣми буквами, поставленными при вершинахъ ихъ тѣлесныхъ угловъ, или двумя буквами, поставленными на концахъ діагоналей.

§ 171. Всякое геометрическое тѣло занимаетъ опредѣленную часть пространства (§ 2). Величина такой части пространства назыв. объемомъ тѣла; слѣдов. *объемомъ тѣла или вмѣстимостію его назыв. величина части пространства, ограниченной поверхностью тѣла*.

Измѣрить объемъ тѣла значитъ сравнить объемъ его съ какимъ нибудь извѣстнымъ объемомъ, принятымъ за единицу мѣры объемовъ, и узнать изъ сколькихъ такихъ единицъ или частей единицы состоитъ данный объемъ.

За единицу объемовъ тѣлъ принятъ объемъ *куба* — тѣла, ограниченнаго со всѣхъ сторонъ шестью равными квадратами, изъ которыхъ сторона каждаго равна какой нибудь единицѣ мѣры длины. Поэтому самыя единицы мѣры объемовъ называютъ *кубическими единицами*. Напр. кубическій аршинъ есть кубъ, всѣ грани котораго суть квадратные аршины.

Число, показывающее сколько въ данномъ объемѣ заключается кубическихъ единицъ или частей такой единицы, опредѣляетъ данный объемъ и есть *мѣра* его.

Отношеніемъ одного объема къ другому называется цѣлое или дробное число, показывающее сколько разъ въ первомъ объемѣ заключается второй или какая нибудь часть втораго. Отсюда слѣдуетъ, что *мѣра объема тѣла есть отношеніе объема этого тѣла къ объему куба, принятаго за единицу мѣры*.

Тѣла, имѣющія равные объемы и при наложеніи совмѣщающіяся, называются *равными*; тѣла, имѣющія равные объемы, но при наложеніи не совмѣщающіяся, называются *равномѣрными*.

§ 172. Чтобы опредѣлить величину поверхности геометр. тѣла, надо измѣрить эту величину, т. е. узнать сколько разъ въ этой поверхности заключается поверхность, принятая за единицу мѣры поверхностей или сколько разъ въ данной поверхности заключается какая нибудь часть этой единицы. За единицу мѣры поверхностей принятъ квадратъ, сторона котораго равна какой нибудь единицѣ мѣры. Такія единицы

называются *квадратными*. Число, показывающее сколько въ данной поверхности заключается квадратныхъ единицъ или частей такой единицы, опредѣляетъ данную поверхность и есть *мѣра поверхности*.

Отношеніемъ одной поверхности къ другой называется цѣлое или дробное число, показывающее сколько разъ въ первой поверхности заключается вторая или какая нибудь часть второй поверхности. Изъ этого слѣдуетъ, что *мѣра поверхности есть отношеніе этой поверхности къ площади квадрата, принятаго за единицу мѣры*. Т. обр. мѣра поверхности всякаго многогранника есть сумма мѣръ площадей граней, его ограничивающихъ.

Если два тѣла равны, то поверхности, а слѣд. и мѣры этихъ поверхностей также *равны*, потому что при совмѣщеніи тѣлъ поверхности совмѣстятся. Поверхности двухъ тѣлъ могутъ быть *равномѣрны*, но не равны, если эти поверхности не совмѣщаются при наложеніи.

Виды и свойства призмъ.

§ 173. Призма (πρίσμα, отпиленный кусокъ,—отъ πρίω, пилю) есть многогранникъ ABCDEFGHIK (чер. 269), у котораго двѣ грани суть равные многоугольники ABCDE и FGHIK, лежащіе въ параллельныхъ плоскостяхъ, а остальныя грани ABIK, BCHI, CDGH.... параллелограммы. Двѣ грани ABCDE и FGHIK назыв. *основаніями* призмы, причемъ одно назыв. нижнимъ, а другое—верхнимъ основаніемъ. Остальныя грани призмы назыв. *боками* ея.

Чер. 269.

Высотою призмы назыв. разстояніе между ея основаніями, т. е. перпендикуляръ, опущенный изъ к. н. точки одного основанія на другое или на продолженіе другаго основанія (§ 163, слѣд. 3).

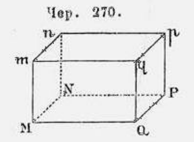
Призмы назыв. треугольными или трегранными, четыреугольными или четырегранными, и т. д., смотря по тому, будутъ-ли основанія ихъ треугольники, четыреугольники и т. д.

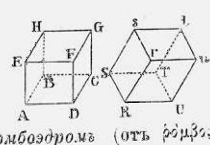
Призма назыв. *прямою*, если боковыя ребра ея перпендикулярны къ основанію; призма назыв. *наклонною*, если боковыя ребра ея наклонны къ основанію.

Очевидно, что боковыя стороны прямой призмы ограни-

чены прямоугольниками, а наклонной — параллелограммами. Прямая призма, у которой основанія суть правильные многоугольники, назыв. *правильною*. Прямая, соединяющая центры двухъ основаній правильной призмы, назыв. *осью* этой призмы. Призма, которой основанія суть параллелограммы или прямоугольники, назыв. *параллелепипедомъ* (παραλληλεπίπεδον, отъ παράλληλος, параллельный, и ἐπίδον, поверхность); притомъ, параллелепипедъ назыв. *прямымъ*, если основанія его суть параллелограммы, а боковыя грани—прямоугольники. Напр. параллелепипедъ MNPQ*mnpq*—прямой параллелепипедъ (чер. 270). Если въ прямомъ параллелепипедѣ и основанія суть прямоугольники, то онъ называется *прямоугольнымъ*, т. е. прямоугольный параллелепипедъ есть такой параллелепипедъ, у котораго всѣ плоскіе углы прямые. Прямоугольный параллелепипедъ ABCDEFGH, котораго всѣ ребра равны, есть *кубъ* (cubus, κύβος, араб. ka'b). Параллелепипедъ RSTU*rstu*, всѣ стороны котораго суть ромбы, назыв. *ромбоэдромъ* (отъ ῥόμβος, ромбъ, и ἕδρα, основаніе).

Чер. 270.



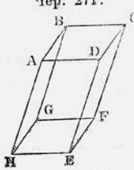


§ 174. **Теорема 1.** *Во всякой призмѣ боковыя ея ребра равны и параллельны между собою.*

Доказ. Такъ какъ боковыя грани призмы суть параллелограммы, то изъ параллелограмма AKFE (чер. 269) имѣемъ, что AK равно и параллельно EF, а изъ параллелограмма EFGD имѣемъ, что EF равно и параллельно DG. Откуда заключаемъ, что AK = DG (акс. I) и AK ∥ DG. (§ 142, теор. 2). Подобнымъ образомъ докажется равенство и параллельность остальныхъ боковыхъ реберъ между собою.

Теорема 2. *Во всякомъ параллелепипедѣ противуположныя грани равны и параллельны.*

Чер. 271.



Въ параллелепипедѣ, какъ и во всякой призмѣ, основанія равны и параллельны, а потому, надо доказать только что боковыя противуположныя грани ABGH и CDEF (чер. 271), а также ADEH и BCFG равны и параллельны между собою.

Доказ. Площади параллелограммовъ ABGH

и CDEF равны, потому что, по теоремѣ 1, $AB=CD=EF=GH$, $AH=BG=CF=DE$, и соотвѣтственные углы равны, какъ углы съ параллельными сторонами (§ 143). Изъ равенства упомянутыхъ угловъ слѣдуетъ параллельность граней ABGH и CDEF (§ 164, теор. 2, слѣд. 3). Подобнымъ образомъ докажемъ равенство и параллельность граней ADEH и BCFG.

Теорема 3. *Всѣ четыре діагонали всякаго параллелепипеда взаимно пересѣкаются и дѣлятся пополамъ въ одной точкѣ.*

Доказ. Проведя діагональную плоскость ABFE (чер. 272) чрезъ ребра AB и EF, получимъ параллелограммъ ABFE, потому что AE равна и параллельна BF (§ 58, теор. 3). Въ этомъ параллелограммѣ діагонали AF и BE, пересѣкаясь, дѣлятся въ точкѣ O пополамъ (§ 58, теор. 5). Проведя діагональную плоскость AGFD чрезъ ребра AD и GF, получимъ, подобно предыдущему, также параллелограммъ AGFD, въ которомъ та же діагональ AF пересѣкается съ діагональю GD и въ точкѣ пересѣченія дѣлится пополамъ; но какъ средина діагонали AF есть точка O, слѣд. и средина діагонали GD есть та же точка O. Подобнымъ образомъ докажемъ, что средина четвертой діагонали HC совпадаетъ съ тою же точкою O.

Чер. 272.

Чер. 273.

Теорема 4. *Квадратъ діагонали прямоугольнаго параллелепипеда равенъ суммѣ квадратовъ всѣхъ трехъ реберъ, выходящихъ изъ одной вершины.*

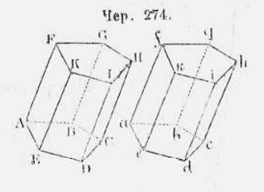
Доказ. $GD^2 = GB^2 + BD^2 = GB^2 + AB^2 + AD^2$ (чер. 273).

Равенство призмъ.

§ 175. **Теорема 1**. *Двѣ призмы равны, если основаніе, одна сторона и двугранный уголъ между ними одной призмы равны соотвѣтственно основанію, одной сторонѣ и двугранному углу между ними другой призмы; притомъ если части эти одинаково расположены.*

Даны двѣ призмы AH и *ah* (чер. 274), въ которыхъ грани ABCDE и ABGF соотвѣтственно равны гранямъ *abcde* и *abgf* и одинаково расположены съ ними, а также заключенные между этими гранями двугранные углы GBAE и *gbae* равны. Требуется доказать, что эти призмы равны, т. е. при наложеніи совмѣщаются.

Чер. 274.



Доказ. Совмѣстимъ призму *ah* съ призмою AH такъ, чтобы основаніе *abcde* совпало съ основаніемъ ABCDE. Вслѣдствіе равенства двугранныхъ угловъ *gbae* и GBAE плоскость грани *abgf* пойдетъ по плоскости грани ABGF; а по равенству и одинаковому расположенію граней—грань *abgf* совпадетъ съ гранью ABGF, причемъ ребро *af* совпадетъ съ ребромъ AF, *bg* съ BG и *fg* съ FG. Итакъ *bc* совпало съ BC и *bg* съ BG, слѣдов. параллелограммъ *gbch* совпалъ съ параллелограммомъ GBCH, т. е. *ch* совпало съ CH и *gh* съ GH; откуда слѣдуетъ, что двугранный уголъ *hgba* совмѣстился съ двуграннымъ угломъ HGBA. Продолжая разсуждать подобнымъ же образомъ далѣе, докажемъ, что и всѣ остальныя ребра и грани призмы *ah* совмѣстятся съ ребрами и гранями призмы AH.

Теорема 2. *Двѣ призмы равны, если три грани, составляющія трегранный уголъ одной призмы, соотвѣтственно равны и одинаково расположены съ тремя гранями, составляющими трегранный уголъ другой призмы.*

Даны двѣ призмы AH и *ah*, въ которыхъ грани ABCDE, ABGF и AEKF соотвѣтственно равны и одинаково расположены съ гранями *abcde*, *abgf* и *aekf*; требуется доказать, что призмы AH и *ah* равны.

Доказ. Изъ даннаго имѣемъ, что плоскіе углы BAE и *bae*, FAB и *fab*, FAE и *fae* равны; изъ равенства же и одинаковаго расположенія этихъ плоскихъ угловъ слѣдуетъ (§ 169, теор. 1) равенство трегранныхъ угловъ A и *a*, откуда заключаемъ, что и двугранные углы GBAE и *gbae* равны, а такъ какъ прилежащія къ нимъ грани ABCDE и *abcde*, ABGF и *abgf* равны и одинаково расположены, то по предыдущей теоремѣ и данныя призмы равны.

Теорема 3. *Прямыя призмы равны, если ихъ основанія и высоты равны.*

При совмѣщеніи одной призмы съ другою, основанія ихъ по равенству совпадутъ, и ребра, какъ равные перпендикуляры, также сольются, а потому верхнія основанія совпадутъ.

Подобіе призмъ.

§ 176. Призмы называются *подобными*, если двугранные углы одной призмы порознь равны двуграннымъ угламъ другой призмы, грани же призмъ соотвѣтственно подобны и одинаково расположены.

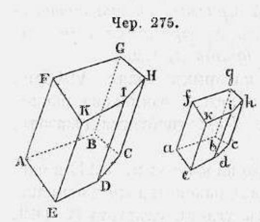
Изъ этого опредѣленія заключаемъ, что всѣ трегранные углы ихъ равны, потому что они составлены изъ одинаково расположенныхъ равныхъ плоскихъ угловъ (§ 169, теор. 1); а эти послѣдніе будутъ равны потому, что суть соотвѣтственные углы подобныхъ фигуръ. Ребра, соединяющія вершины плоскихъ равныхъ угловъ въ двухъ подобныхъ призмахъ, называются *сходственными*.

Сходственныя ребра подобныхъ призмъ пропорціональны, какъ сходственныя стороны подобныхъ фигуръ.

Теорема 1. *Двѣ призмы подобны, если двугранный уголъ при основаніи въ одной равенъ двугранному углу при основаніи въ другой, а грани, составляющія эти углы, соотвѣтственно подобны и одинаково расположены.*

Даны призмы AH и *ah* (чер. 275), въ которыхъ грани ABCDE и ABGF соотвѣтственно подобны и одинаково расположены съ гранями *acbde* и *abgf*, а двугранные углы GBAE и *gbae* равны. Требуется доказать, что призмы AH и *ah* подобны, т. е. соотвѣтственные двугранные углы ихъ равны, а грани, заключающія равные двугранные углы, подобны и одинаково расположены.

Чер. 275.



Доказ. Трегранные углы B и *b* равны между собою, потому что двугранные углы GBAE и *gbae* равны, а также $\angle ABC = \angle abc$ и $\angle GBA = \angle gba$, какъ соотвѣтственные углы, по условію, подобныхъ и одинаково расположенныхъ граней (§169, теор. 2). Изъ равенства же трегранныхъ угловъ B и *b* заключаемъ, что двугранный уголъ HCBA равенъ двугранному углу *hcba*, двугранный уголъ HGBA равенъ двугранному углу *hgba* и $\angle GBC = \angle gbc$, а изъ подобія граней имѣемъ, что

$$BG : bg = AB : ab$$
$$BC : bc = AB : ab$$

откуда (аксіома 1)

$$BG : bg = BC : bc.$$

Итакъ, параллелограммы GBCH и *gbch* подобны, потому что имѣютъ соотвѣтственно равные углы и пропорціональныя стороны.

Затѣмъ, изъ равенства двугранныхъ угловъ GBCD и *gbcd* и подобія одинаково расположенныхъ граней, составляющихъ эти углы, точно также заключимъ о равенствѣ трегранныхъ угловъ C и *c*, а изъ этого послѣдняго равенства заключимъ о равенствѣ двугранныхъ угловъ IHCB и *ihcb*, а также двугранныхъ угловъ HCDE и *hcde*, и о подобіи параллелограммовъ IHCD и *ihcd*. Подобнымъ образомъ докажемъ, что въ обѣихъ призмахъ всѣ трегранные углы, лежащіе при нижнемъ основаніи, а также двугранные углы, составленные боковыми гранями между собою и съ нижнимъ основаніемъ, соотвѣтственно равны. Двугранные же углы, составленные верхнимъ основаніемъ съ боковыми сторонами, будутъ также соотвѣтственно равны, потому что суть дополненія до двухъ прямыхъ двугранныхъ угловъ двуграннымъ угламъ, лежащимъ при нижнемъ основаніи и составленнымъ этими послѣдними—съ тѣми же боковыми сторонами (§ 165). Также докажемъ подобіе всѣхъ одинаково расположенныхъ соотвѣтственныхъ боковыхъ граней обѣихъ призмъ; верхнія же основанія будутъ подобны, потому что они равны нижнимъ, которыя даны подобными. Итакъ, въ обѣихъ призмахъ всѣ двугранные углы соотвѣтственно равны, а грани подобны и одинаково расположены, слѣдов. призмы подобны.

Теорема 2. *Двѣ призмы подобны, если три грани, составляющія трегранный уголъ одной призмы, подобны и одинаково расположены съ тремя гранями, составляющими трегранный уголъ другой призмы.*

Дано, что грани ABCDE, ABGF и BCHG соотвѣтственно подобны и одинаково расположены съ гранями *abcde*, *abgf* и *bchg*; требуется доказать, что призма AH подобна призмѣ *ah*.

Доказ. Изъ даннаго слѣдуетъ, что плоскіе углы ABC и

abc, ABG и abg, GBC и gbc равны и одинаково расположены, слѣд. и трегранные углы B и b также равны (§ 169, теор. 1), откуда заключаемъ, что и двугранные углы GBAE и $gbae$ равны, и притомъ заключены между двумя подобными и одинаково расположенными гранями ABCDE и $abcde$, ABGF и $abgf$; слѣд. по предыдущей теоремѣ призмы подобны.

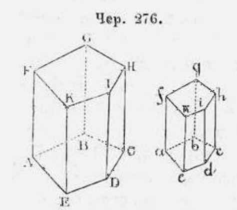
Слѣдствіе. *Всѣ кубы подобны, потому что всѣ грани, какъ квадраты, подобны и всѣ двугранные углы равны, какъ прямые.*

Теорема 3. *Прямыя призмы подобны, если ихъ основанія подобны, а высоты пропорціональны сторонамъ основаній.*

Дано, что ABCDE ∾ $abcde$ (чер. 276) и $\frac{AF}{af}=\frac{AB}{ab}$; требуется доказать, что призма AH подобна призмѣ ah.

Доказ. Прямоугольники ABGF и $abgf$ подобны, потому что $\frac{AF}{af}=\frac{AB}{ab}$. Такъ какъ данныя призмы прямыя, то двугранные углы GBAE и $gbae$ прямые, а потому они равны; сверхъ того, по условію ABCDE ∾ $abcde$; такимъ образомъ данныя двѣ прямыя призмы имѣютъ по равному двугранному углу, прилежащему къ основанію, и по двѣ подобныя и одинаковымъ образомъ расположенныя грани, заключающія эти углы, а потому, по теоремѣ 1, эти призмы подобны.

Чер. 276.



Слѣдствіе. *Прямоугольные параллелепипеды подобны, если соотвѣтственныя ихъ измѣренія пропорціональны.*

Измѣреніе поверхностей призмъ.

§ 177. Мѣра полной поверхности призмы равна суммѣ мѣръ площадей всѣхъ граней призмы; мѣра боковой поверхности призмы равна суммѣ мѣръ площадей боковыхъ граней призмы.

Теорема. *Мѣра боковой поверхности наклонной призмы равна боковому ребру призмы, умноженному на длину периметра перпендикулярнаго къ ребру сѣченія.*

Положимъ, что сѣченіе перпендикулярное къ ребру AG (чер. 277) есть $xyzut$ и докажемъ, что мѣра боковой поверхности призмы $AI=(xy+yz+zu+ut+tx).AG$.

Чер. 277.

Доказ. Замѣтивъ, что всѣ боковыя ребра призмы равны между собою (§ 174, теор. 1), т. е. AG=BH=CI=..., будемъ имѣть, что

мѣра пл. параллелограмма $AH=AG.xy$

" " " $BI=BH.yz=AG.yz$

" " " $CK=CI.zt=AG.zu$

и т. д.

Складывая эти равенства, получимъ, что искомая мѣра боковой поверхности призмы равна $(xy+yz+zu+\dots\dots)AG$. Такъ какъ оба основанія призмы равны, то мѣра полной поверхности призмы равна мѣрѣ боковой поверхности призмы, сложенной съ удвоенной мѣрой площади основанія.

Очевидно, что мѣра боковой поверхности прямой призмы равна длинѣ периметра основанія, умноженной на ребро.

Задача. *По тремъ ребрамъ прямоугольнаго параллелепипеда опредѣлить мѣру полной поверхности его.*

Рѣш. Означая длину трехъ реберъ прямоугольнаго параллелепипеда, выходящихъ изъ одной вершины буквами a, b, c, найдемъ, что мѣра полной поверхности прямоугольнаго параллелепипеда равна $2(ab+ac+bc)$.

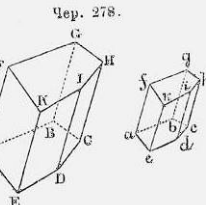
§ 178. **Теорема**. *Мѣры боковыхъ или полныхъ поверхностей подобныхъ призмъ относятся между собою, какъ квадраты сходственныхъ реберъ.*

Доказ. Такъ какъ площади подобныхъ фигуръ относятся между собою, какъ квадраты сходственныхъ сторонъ (§ 104, теор. 3), то имѣемъ (чер. 278)

$$\frac{AG}{ag}=\frac{AB^2}{ab^2};\quad \frac{BH}{bh}=\frac{BC^2}{bc^2};\quad \frac{CI}{ci}=\frac{CD^2}{cd^2}\dots,$$

откуда $$\frac{AG+BH+CI+\dots}{ag+bh+ci+\dots}=\frac{AB^2}{ab^2}.$$

Чер. 278.



Означимъ мѣры боковыхъ поверхностей призмъ AH и ah чрезъ S и s, тогда изъ послѣдней пропорціи будемъ имѣть, что

$$\frac{S}{s}=\frac{AB^2}{ab^2}\quad(1),$$ но

$$\frac{\text{мѣра пл. } ABCDE}{\text{мѣра пл. } abcde}=\frac{AB^2}{ab^2}$$ или

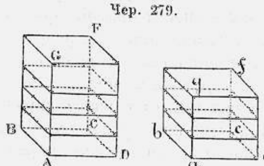
$\frac{2 \text{ мѣра пл. } ABCDE}{2 \text{ мѣра пл. } abcde} = \frac{AB^2}{ab^2}$. Пропорціи (1) и послѣдняя даютъ новую пропорцію: $\frac{S + 2 \text{ мѣра пл. } ABCDE}{s + 2 \text{ мѣра пл. } abcde} = \frac{AB^2}{ab^2}$. Означивъ мѣры полныхъ поверхностей призмъ AH и ah чрезъ S' и s', получимъ: $\frac{S'}{s'} = \frac{AB^2}{ab^2}$.

Измѣреніе объемовъ призмъ.

§ 179. **Теорема 1**. *Отношеніе объемовъ двухъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ равныя основанія, но разныя высоты, равно отношенію высотъ этихъ параллелепипедовъ.*

Даны два прямоугольные параллелепипеда AF и af (чер. 279)

Чер. 279.



имѣющіе равныя основанія ABCD и $abcd$, но разныя высоты AG и ag. Треб. доказать, что

$$\frac{AF}{af} = \frac{AG}{ag}.$$

Доказ. Разсмотримъ два случая отдѣльно:

1-й случай. Высоты AG и ag соизмѣримы и пусть общая мѣра ихъ, прямая k, въ высотѣ AG уложилась m разъ, а въ высотѣ ag—n разъ; тогда $AG = mk$ и $ag = nk$. Раздѣливъ первое равенство на второе, получимъ:

$$\frac{AG}{ag} = \frac{m}{n} \quad (1).$$

Проведемъ чрезъ всѣ точки отложенія общей мѣры на высотахъ AG и ag плоскости, параллельныя основаніямъ. Эти плоскости дадутъ площади сѣченій равныя площадямъ основаній, потому что стороны этихъ сѣченій соотвѣтственно равны и параллельны сторонамъ основаній (§ 163, слѣд. I) и углы, заключенные между параллельными сторонами, тоже равны (§ 143). Тогда параллелепипедъ AF раздѣлится на m, а параллелепипедъ af—на n параллелепипедовъ, которые всѣ между собою равны, потому что имѣютъ равныя боковыя ребра, перпендикулярныя къ равнымъ основаніямъ, и поэтому при наложеніи совмѣстятся другъ съ другомъ. Означивъ объемъ одного изъ вновь полученныхъ параллелепипедовъ черезъ g, имѣемъ, что $AF = mg$ и $af = ng$. Раздѣливъ первое равенство на второе, получимъ:

$$\frac{AF}{af} = \frac{m}{n} \quad (2).$$

Сравнивая пропорціи (1) и (2), получимъ:

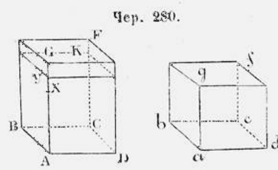
$$\frac{AF}{af} = \frac{AG}{ag}.$$

2-й случай. Докажемъ справедливость этой теоремы въ томъ случаѣ, когда высоты AG и ag (чер. 280) несоизмѣримы. Предположимъ, что въ этомъ случаѣ отношеніе объемовъ параллелепипедовъ $\frac{AF}{af}$ не будетъ равно отношенію ихъ высотъ $\frac{AG}{ag}$, напр. пусть $\frac{AF}{af} < \frac{AG}{ag}$. Чтобы это неравенство обратить въ равенство, надо уменьшить дробь $\frac{AG}{ag}$, т. е. должно выбрать такую прямую AX меньшую AG, чтобы отношеніе $\frac{AX}{ag}$ равнялось отношенію $\frac{AF}{af}$, т. е., чтобы было

$$\frac{AF}{af} = \frac{AX}{ag} \quad (1).$$

Затѣмъ, раздѣлимъ высоту ag параллелепипеда af на равныя части, меньшія прямой GX и одну изъ этихъ частей будемъ откладывать на прямой AG отъ точки A; тогда по крайней мѣрѣ одно изъ дѣленій упадетъ между точками G и X, напр. въ какой нибудь точкѣ Y. Черезъ точку Y параллельно основанію проведемъ плоскость YK и

Чер. 280.



получимъ параллелепипедъ AK, высота котораго AY будетъ соизмѣрима съ высотою ag паллелепипеда af; поэтому, на основаніи 1-го случая, имѣемъ:

$$\frac{AK}{af} = \frac{AY}{ag} \quad (2).$$

Раздѣливъ (1) на (2) получимъ пропорцію

$$\frac{AF}{AK} = \frac{AX}{AY},$$

что невозможно, потому что

$$\frac{AF}{AK} > 1, \quad \text{а} \quad \frac{AX}{AY} < 1.$$

Слѣдов. невозможно допустить, чтобы отношеніе объемовъ $\frac{AF}{af}$ было меньше отношенія $\frac{AG}{ag}$.

Подобнымъ образомъ докажемъ, что отношеніе $\frac{AF}{af}$ не можетъ быть болѣе отношенія $\frac{AG}{ag}$. Итакъ, $\frac{AF}{af} = \frac{AG}{ag}$ (акс. 9), что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. *Если въ прямоугольномъ параллелепипедѣ основаніе постоянно, а высота измѣняется, то объемъ такого прямоугольнаго параллелепипеда пропорціоналенъ измѣняющейся высотѣ.*

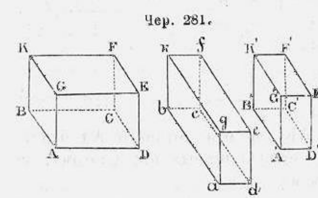
Теорема 2. *Отношеніе объемовъ двухъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ равныя высоты, но разныя основанія, равно отношенію площадей ихъ основаній.*

Дано, что прямоугольные параллелепипеды AF и af (чер. 281) имѣютъ равныя высоты AG и ag, но разныя основанія ABCD и $abcd$; требуется доказать, что

$$\frac{AF}{af} = \frac{ABCD}{abcd}.$$

Доказ. Построимъ третій прямоугольный параллелепипедъ A′F′, имѣющій высоту A′G′, равную высотѣ данныхъ параллелепипедовъ, а основаніе—прямоугольникъ, одна сторона котораго A′B′ равна сторонѣ AB основанія параллелепипеда AF, а другая B′C′ равна сторонѣ bc основанія другаго параллелепипеда af. Прямоугольники ABKG и A′B′K′G′ равны, поэтому, принявъ ихъ за основанія,

Чер. 281.



а ребра BC и B′C′ за высоты параллелепипедовъ AF и A′F′, по предыдущей теоремѣ, получимъ:

$$\frac{AF}{A'F'} = \frac{BC}{B'C'};$$

такъ какъ прямоугольники B′C′F′K′ и $bcfk$ равны, то, принявъ ихъ за основанія, а ребра A′B′ и ab за высоты параллелепипедовъ A′F′ и af, получимъ:

$$\frac{A'F'}{af} = \frac{A'B'}{ab}.$$

Перемноживъ полученныя пропорціи, будемъ имѣть:

$$\frac{AF}{af} = \frac{A'B' \cdot BC}{ab \cdot B'C'}, \quad \text{но} \quad A'B' = AB \quad \text{и} \quad B'C' = bc,$$

слѣд.

$$\frac{AF}{af} = \frac{AB \cdot BC}{ab \cdot bc} \quad \text{или} \quad \frac{AF}{af} = \frac{ABCD}{abcd}.$$

Слѣдствіе. *Если въ прямоугольномъ параллелепипедѣ высота постоянна, а основаніе измѣняется, то объемъ такого параллелепипеда пропорціоналенъ измѣняющейся площади основанія.*

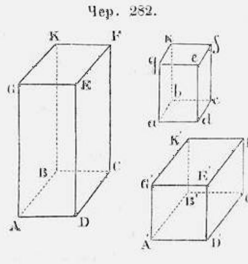
Теорема 3. *Отношеніе объемовъ двухъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ разныя основанія и высоты, равно произведенію отношенія площадей ихъ основаній на отношеніе ихъ высотъ.*

Даны два прямоугольные параллелепипеда AF и af (чер. 282), которыхъ высоты AG и ag, а также основанія ABCD и $abcd$—различны. Требуется доказать, что

$$\frac{AF}{af} = \frac{ABCD}{abcd} \cdot \frac{AG}{ag}.$$

Доказ. Построимъ третій параллелепипедъ A′F′, основаніе A′B′C′D′ котораго равно основанію ABCD параллелепипеда AF, и высота A′G′ равнялась бы высотѣ ag параллелепипеда af.

Чер. 282.



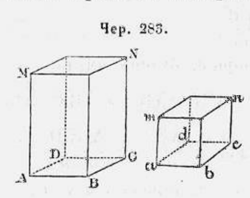
По теор. 1 имѣемъ $\frac{AF}{A'F'} = \frac{AG}{ag}$,

а по теор. 2 $\frac{A'F'}{af} = \frac{ABCD}{abcd}$,

Перемножимъ эти двѣ пропорціи и найдемъ, что

$$\frac{AF}{af} = \frac{ABCD}{abcd} \cdot \frac{AG}{ag}.$$

§ 180. **Теорема**. *Мѣра объема прямоугольнаго параллелепипеда равняется произведенію мѣры площади его основанія на высоту или произведенію чиселъ, выражающихъ длины трехъ его измѣреній.*



Чер. 283.

Пусть данъ кубъ *an* (чер. 283), принятый за единицу мѣры объемовъ, ребро котораго $ab=ad=am$ есть единица длины, и пусть данъ какой нибудь прямоугольный параллелепипедъ AN, площадь основанія котораго ABCD имѣетъ мѣру B, а высота AM—длину H. Означивъ черезъ V мѣру объема параллелепипеда AN, докажемъ, что

$$V = B . H.$$

Доказ. По предыдущей теоремѣ имѣемъ:

$$\frac{AN}{an} = \frac{ABCD}{abcd} \cdot \frac{AM}{am}.$$

Въ этомъ равенствѣ отношеніе объемовъ $\frac{AN}{an}$ равно числу V, измѣряющему объемъ даннаго параллелепипеда AN кубомъ *an*, объемъ котораго принятъ за единицу мѣры объемовъ; отношеніе $\frac{ABCD}{abcd}$ есть число B, измѣряющее площадь основанія параллелепипеда квадратомъ *abcd*, который есть единица мѣры площадей, и отношеніе $\frac{AM}{am}$ есть число H, выражающее результатъ измѣренія высоты AM единицею мѣры *am*. Слѣд. послѣднее равенство показываетъ, что мѣра объема прямоугольнаго параллелепипеда равняется произведенію числа, выражающаго мѣру площади его основанія, на число, выражающее длину его высоты, лишь бы только за кубическую единицу мѣры принятъ былъ кубъ, ребро котораго есть линейная единица мѣры, т. е.

$$V = B . H.$$

Обыкновенно это выражаютъ кратко, хотя не точно, такъ: *объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ произведенію основанія на высоту.*

§ 181. **Теорема.** *Мѣра объема прямой треугольной призмы равна произведенію мѣры площади ея основанія на высоту.*

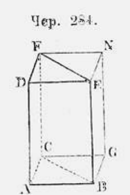
Означимъ чрезъ V—мѣру объема прямой треугольной призмы, чрезъ B и H—соотвѣтственно мѣру площади основанія и длину высоты призмы. Требуется доказать, что

$$V = B . H.$$

Треугольникъ, лежащій въ основаніи прямой призмы, можетъ быть прямоугольный, остроугольный и тупоугольный; разсмотримъ каждый изъ этихъ случаевъ отдѣльно.

1-й случай. Пусть дана прямая треугольная призма ABCFED (чер. 284), основаніе которой есть прямоугольный △ABC.

Доказ. Проведемъ чрезъ ребро FC плоскость, параллельную грани ABED, а чрезъ ребро BE—плоскость, параллельную грани ACFD. Эти плоскости пересѣкутся между собою по прямой NG, и, встрѣчаясь съ продолженными гранями верхняго и нижняго основаній, ограничиваютъ тѣло AN. Это тѣло есть параллелепипедъ, такъ какъ противуположныя грани, по построенію, параллельны, и каждая грань, напр. ABGC, есть параллелограммъ, потому что AB ‖ CG, какъ сѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей AE и CN третьей плоскостью AG (§ 163, слѣд. I), и BG ‖ AC, какъ сѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей BN и AF той же плоскостью AG. Прямая треугольная призма BCGNFE равна данной призмѣ, потому что эти двѣ призмы имѣютъ основаніями равные треугольники (§ 58, теор. 4) и высотами ихъ служатъ равныя ребра, перпендикулярныя къ основаніямъ, слѣдов. онѣ совмѣстятся при наложеніи. По § 180 мѣра объема прямоугольнаго параллелепипеда AN, или 2V, равна

Чер. 284.


мѣрѣ 2 пл. △ABC . AD = 2B . H; слѣдов.

$$V = B . H.$$

2-й случай. Пусть дана прямая треугольная призма ABCFED (чер. 285), основаніе которой есть остроугольный △ABC.

Доказ. Проведемъ чрезъ какое нибудь боковое ребро, напр. AD, плоскость ADNG, перпендикулярную къ противуположной этому ребру грани BF, тогда данная призма раздѣлится на двѣ призмы, основаніями которыхъ служатъ прямоугольные треугольники ABG и ACG, и, по 1 случаю, будемъ имѣть:

Чер. 285.

мѣра объема призмы ABGNED=
$=$ мѣрѣ пл. $\triangle$ ABG . AD

мѣра объема призмы AGCFND=
$=$ мѣрѣ пл. $\triangle$ AGC . AD.

Сложивъ эти равенства, получимъ, что

$$V = (\text{мѣра пл. } \triangle ABG + \text{мѣра пл. } \triangle AGC) . AD$$

или

$$V = B . H.$$

3-й случай. Пусть дана прямая треугольная призма $A'B'C'F'E'D'$, основаніе которой есть тупоугольный $\triangle A'B'C'$.

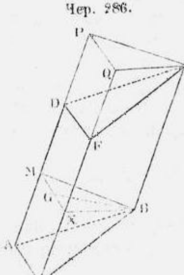
Доказ. Проведемъ чрезъ ребро $A'D'$, выходящее изъ вершины тупаго угла $\triangle A'B'C'$, плоскость $A'D'N'G'$, перпендикулярную къ грани $B'F'$, и, разсуждая такъ же, какъ во 2 случаѣ, опять найдемъ, что

$$V = B . H.$$

§ 182. **Теорема**. *Мѣра объема всякой треугольной призмы равняется мѣрѣ площади одной изъ боковыхъ граней призмы, умноженной на половину разстоянія этой грани отъ противулежащаго ей ребра.*

Пусть дана треугольная наклонная призма ABCFDE (чер. 286); требуется доказать, что мѣра ея объема V равняется произведенію мѣры площади одной изъ боковыхъ граней, напр. грани ACFD, на половину разстоянія BG этой грани отъ противулежащаго ей ребра BE, т. е.

Чер. 286.



$$V = \text{мѣрѣ пл. } ACFD . \frac{BG}{2}.$$

Доказ. Проведемъ черезъ перпендикуляръ BG и вершину E плоскости BMN и EPQ, перпендикулярныя къ ребру BE и слѣд. параллельныя между собою (§ 164, теор. 1), которыя съ гранями данной призмы и ихъ продол-

женіями образуютъ прямую призму BMNQPE. Докажемъ, что многогранникъ ACBMN равенъ многограннику DFEPQ. Въ самомъ дѣлѣ, $\triangle BMN = \triangle EPQ$, какъ основанія прямой призмы, ребро QF=ребру NC, такъ какъ BE = QN=FC

или

$$QF + FN = FN + NC,$$

откуда

$$QF = NC.$$

Такъ же докажемъ, что PD=MA. Если совмѣстить нижній многогранникъ съ верхнимъ такъ, чтобы основанія ихъ MNB и PQE совпали, то ребра NC и MA пойдутъ соотвѣтственно по ребрамъ QF и PD, какъ перпендикулярныя къ совмѣщеннымъ основаніямъ, и по равенству этихъ реберъ точка C упадетъ въ F и A въ D; слѣд. сказанные многогранники совмѣстятся, а потому они равны. Данная призма равномѣрна прямой призмѣ MNBEPQ, потому что если отъ всего многогранника ABCQEP отнимемъ верхній многогранникъ DFEPQ, то получимъ данную призму, а если отъ всего многогранника ABCQEP отнимемъ нижній многогранникъ ACBMN, то получимъ прямую призму MNBEPQ. Мѣра объема прямой призмы, слѣдов. и данной призмы, равна мѣрѣ площади $\triangle BMN . BE$ (§ 181), но

$$\text{мѣра пл. } \triangle BMQ = MN . \frac{BG}{2} \text{ (§ 101) и } BE = AD; \text{ поэтому}$$

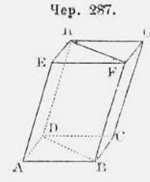
$$V = MN . \frac{BG}{2} . AD = MN . AD . \frac{BG}{2} = \text{мѣрѣ пл. } ACFD . \frac{BG}{2}.$$

Замѣчаніе. Доказательство остается тоже и въ случаѣ, если плоскость BMN не пересѣчетъ оба ребра AD и CF или одно изъ нихъ, а пересѣчетъ ихъ продолженія.

Слѣдствіе. *Всякій параллелепипедъ дѣлится діагональною плоскостью на двѣ равномѣрныя треугольныя призмы.*

Въ самомъ дѣлѣ, параллелепипедъ AF (чер. 287) дѣлится плоскостью BDHF на двѣ призмы BCDHGF и ABDHFE, мѣры объемовъ которыхъ равны, потому что, по доказанной теоремѣ, мѣра объема призмы BCDHGF, равна мѣрѣ площади грани DCGH, умноженной на половину разстоянія этой грани отъ ребра FB или отъ противуположной грани ABFE, а мѣра объема призмы ABDHFE равна мѣрѣ площади грани ABFE на половину разстоянія этой грани отъ ребра HD или отъ противуположной грани DCGH; притомъ грань DCGH равна грани

Чер. 287.



ABFE (§ 174, теор. 2) и разстояніе между ними вездѣ одинаково (§ 163, слѣд. 3).

§ 183. **Теорема 1.** *Объемъ всякой треугольной призмы измѣряется произведеніемъ мѣры площади основанія на высоту.*

Пусть дана наклонная треугольная призма ABDHFE (чер. 288); означимъ чрезъ V мѣру ея объема, чрезъ B — мѣру площади основанія $\triangle$ABD, и чрезъ H — длину высоты EK. Докажемъ, что

$$V = BH.$$

Доказ. Проведемъ черезъ ребро BF плоскость, параллельную грани ADHE, и чрезъ ребро DH — плоскость, параллельную грани ABFE. Подобно тому, какъ въ § 181, докажемъ, что эти плоскости, пересѣкаясь между собою по прямой CG и съ продолженными гранями верхняго и нижняго основаній, ограничиваютъ параллелепипедъ AG. На основаніи слѣдствія предыдущей теоремы мѣра объема данной призмы равна половинѣ мѣры объема построеннаго параллелепипеда AG.

Чер 288.

Если проведемъ діагональную плоскость BCHE въ параллелепипедѣ AG, то отдѣлимъ новую призму ABCDHE, мѣра объема которой, на основаніи того же слѣдствія, равна тоже половинѣ мѣры объема построеннаго параллелепипеда AG. Слѣдов. мѣра объема V данной призмы равна мѣрѣ объема новой треугольной призмы ABCDHE. Но, по предыдущей теоремѣ, мѣра объема послѣдней призмы равна мѣрѣ площади боковой грани ея ABCD, умноженной на половину разстоянія этой грани отъ противуположнаго ребра EH, т. е. на $\frac{EK}{2}$, поэтому и

$$V = \text{мѣрѣ пл. } ABCD \cdot \frac{EK}{2} = \frac{\text{мѣрѣ пл. } 2\triangle ABD \cdot EK}{2} \text{ или}$$

$$V = B \cdot H.$$

Слѣдствіе 1. *Мѣра объема всякаго параллелепипеда равна мѣрѣ площади его основанія, умноженной на высоту*, потому что онъ дѣлится діагональною плоскостью на двѣ равномѣрныя треугольныя призмы, сумма основаній которыхъ составляетъ основаніе параллелепипеда.

Слѣдствіе 2. *Параллелепипеды съ равномѣрными основаніями и равными высотами равномѣрны.*

Теорема 2. *Мѣра объема всякой многоугольной призмы равна мѣрѣ площади основанія ея на высоту.*

Дана наклонная многоугольная призма AI (чер. 289). Означимъ чрезъ V мѣру объема призмы, чрезъ B — мѣру площади ея основанія, а чрезъ H — высоту, и докажемъ, что

$$V = B \cdot H.$$

Чер. 289.

Доказ. Проведемъ чрезъ какое нибудь ребро AF діагональныя плоскости, которыя раздѣлятъ данную призму на треугольныя призмы, высоты которыхъ одинаковы съ высотою данной призмы, а сумма площадей ихъ основаній составляетъ площадь основанія данной призмы, поэтому, найдя по теор. 1 мѣру площади каждой изъ треугольныхъ призмъ и сложивъ эти мѣры, получимъ

$$V = B \cdot H.$$

Слѣдствіе 1. *Мѣра объема всякой прямой призмы равна произведенію мѣры площади ея основанія на боковое ребро.*

Слѣдствіе 2. *Отношеніе объемовъ двухъ призмъ равно произведенію отношенія площадей ихъ основаній на отношеніе высотъ.*

Слѣдствіе 3. *Если основаніе призмы постоянно, а высота измѣняется, то объемъ призмы пропорціоналенъ высотѣ. Если же высота призмы постоянна, а основаніе измѣняется, то объемъ призмы пропорціоналенъ площади основанія.*

§ 184. **Теорема.** *Мѣры объемовъ подобныхъ призмъ относятся между собою какъ кубы сходственныхъ реберъ.*

Доказ. Означимъ мѣры объемовъ призмъ AH и ah (чер. 290) чрезъ V и v, мѣры площадей основаній ABCDE и $abcde$ и высоты FO и fo тѣхъ же призмъ означимъ соотвѣтственно чрезъ B и b, H и h; тогда будемъ имѣть, что

$$\frac{V}{v} = \frac{B}{b} \cdot \frac{H}{h} \quad (1).$$

Чер. 290.



Изъ подобія призмъ AH и ah

слѣдуетъ, что трегранные углы A и a равны между собою и грани этихъ угловъ одинаково расположены (§ 176), а потому при наложеніи A и a совмѣстятся, причемъ ребро ab пойдетъ по ребру AB, ae — по AE и af — по AF. Изъ этого можно заключить, что уголъ прямой AF съ плоскостью основанія ABCDE равенъ углу прямой af съ плоскостью основанія $abcde$, т. е. $\angle FAO = \angle fao$ (§ 156). Прямоугольные треугольники AFO и afo подобны, потому что $\angle FAO = \angle fao$ (§ 93, теор. 4, слѣд. 2), откуда

$$\frac{FO}{fo} = \frac{FA}{fa}, \quad \text{но} \quad \frac{FA}{fa} = \frac{AB}{ab} \ (\S\ 176), \ \text{т. е.}$$

$$\frac{H}{h} = \frac{AB}{ab}. \quad \text{Также} \quad \frac{B}{b} = \frac{AB^2}{ab^2}. \ (\S\ 104, \ \text{теор. } 3).$$

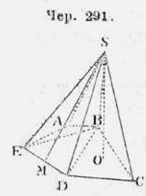
Вставивъ въ пропорцію (1) вмѣсто $\frac{H}{h}$ и $\frac{B}{b}$ ихъ выраженія получимъ

$$\frac{V}{v} = \frac{AB^3}{ab^3}.$$

Виды и свойства пирамидъ.

§ 185. Пирамида (πυραμίς, ίδος, — отъ египетскаго piromi) есть многогранникъ (чер. 291), у котораго одна грань многоугольникъ ABCDE, а другія грани суть треугольники, сходящіеся въ одной точкѣ S. Эта точка S называется *вершиною* пирамиды. Многоугольникъ ABCDE называется *основаніемъ* пирамиды. Перпендикуляръ SO, опущенный изъ вершины пирамиды на основаніе или на его продолженіе, называется *высотою* пирамиды. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины пирамиды на сторону основанія пирамиды, напр. SM, называется *апоѳемою*.

Чер. 291.



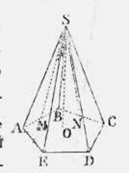
Пирамиды называются треугольными или трегранными, четыреугольными или четырегранными и т. д. смотря потому, будутъ ли основанія ихъ — треугольники, четыреугольники и т. д.

Плоскость SBD, проходящая чрезъ два ребра и не совпадающая съ гранью пирамиды, назыв. *діагональною плоскостью.*

Всякую многоуг. пирамиду SABDE можно раздѣлить діагональными плоскостями на треуг. пирамиды SABE, SBDE, SBCD.

Если пирамида SABCDE (чер. 292) имѣетъ своимъ основаніемъ правильный многоугольникъ ABCDE, центръ котораго O совпадаетъ съ основаніемъ высоты SO пирамиды, то такая пирамида наз. *правильною*. Высота SO правильной пирамиды наз. *осью* пирамиды. Очевидно, что треугольники SAB, SBC, SCD, SDE, SEA, составляющіе боковыя грани правильной пирамиды, равны между собою, потому что ребра AS, BS, CS и т. д. равны (§ 151, теор. 1), а $AB = BC = CD = \ldots\ldots$, какъ стороны правильнаго многоугольника. Всѣ апоѳемы правильной пирамиды SM, SN.... также равны между собою (§ 53, теор. 4, слѣд. 4).

Чер. 292.



§ 186. **Теорема** I. *Плоскость, проведенная чрезъ к. н. точку боковаго ребра параллельно основанію пирамиды, 1) пересѣкаетъ всѣ боковыя ребра и высоту пирамиды и дѣлитъ ихъ на части, пропорціональныя между собою, 2) пересѣкаясь съ боковыми сторонами пирамиды, даетъ въ сѣченіи многоугольникъ, подобный основанію, и 3) отношеніе площади этого многоугольника сѣченія къ площади многоугольника основанія равно отношенію квадратовъ ихъ разстояній отъ вершины пирамиды.*

Чрезъ точку a ребра AS пирамиды SABCDE (чер. 293) проведемъ параллельно основанію ABCDE плоскость MN, которая пересѣчетъ боковыя ребра AS, BS, CS.... въ точкахъ a, b, c.... и высоту SO въ точкѣ o, а боковыя грани ASB, BSC, CSD... по прямымъ ab, bc, cd,.... которыя составятъ многоугольникъ $abcde$. Требуется доказать, что

Чер. 293.

$$1) \quad \frac{AS}{as} = \frac{BS}{bs} = \frac{CS}{cs} = \ldots = \frac{SO}{so},$$

$$2) \quad ABCDE \sim abcde$$

$$\text{и } 3) \quad \frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } abcde} = \frac{SO^2}{so^2}.$$

Доказ. 1) Проведемъ чрезъ высоту SO и к. н. боковое ребро AS данной пирамиды плоскость, которая пересѣчетъ основаніе ABCDE и плоскость сѣченія $abcde$ по прямымъ

АО и *ао*. Прямыя АВ, ВС, CD, DE, ЕА, АО соотвѣтственно параллельны прямымъ *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ca*, *ao* (§ 163, слѣд. 1), поэтому имѣемъ

$$\frac{AS}{as}=\frac{BS}{bs}=\frac{CS}{cs}=\frac{DS}{ds}=\frac{ES}{es}=\frac{SO}{so} \text{ (§ 85, т. I).}$$

2). Такъ какъ прямая АВ параллельна *ab*, то $\triangle ASB \infty \triangle asb$ (§ 92) и потому

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BS}{bs}.$$

Такъ какъ прямая ВС параллельна прямой *bc*, то $\triangle BSC \infty \triangle bsc$ и потому

$$\frac{BC}{bc}=\frac{BS}{bs}.$$

Въ этихъ двухъ пропорціяхъ вторыя отношенія равны, слѣд. и первыя отношенія равны, т. е.

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}.$$

Подобнымъ образомъ докажемъ, что

$$\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd},\ \frac{CD}{cd}=\frac{DE}{de},\ \frac{DE}{de}=\frac{EA}{ea},$$

откуда получимъ, что

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\frac{DE}{de}=\frac{EA}{ea},$$

т. е. всѣ соотвѣтственныя стороны сѣченія и основанія пропорціональны. Сверхъ того углы A, B, C, D, E соотвѣтственно равны угламъ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, какъ углы однородные, со сторонами соотвѣтственно параллельными (§ 143). Отсюда заключаемъ, что $ABCDE \infty abcde$ (§ 95).

3). По теоремѣ 3 § 104 имѣемъ, что

$$\frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } abcde}=\frac{AB^2}{ab^2},$$

но, по выше доказанному,

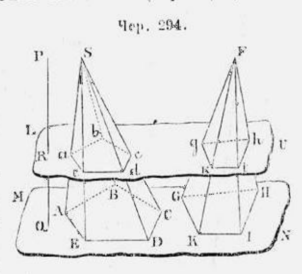
$$\frac{AB}{ab}=\frac{AS}{as}=\frac{SO}{so}, \text{ слѣд.}$$

$$\frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } abcde}=\frac{SO^2}{so^2}.$$

Теорема 2. *Если двѣ пирамиды, которыхъ высоты равны, и основанія лежатъ въ одной плоскости, пересѣчемъ плоскостью, параллельною ихъ основаніямъ, то отношеніе основаній будетъ равно отношенію площадей сѣченій.*

Даны двѣ пирамиды SABCDE и FGHIK (чер. 294), которыя имѣютъ общую высоту PQ, а основанія ихъ ABCDE и GHIK лежатъ въ одной плоскости MN; проведемъ параллельно плоскости MN чрезъ к. н. точку R высоты PQ плоскость LU, которая, пересѣкая пирамиду SABCDE, дастъ многоугольникъ *abcde*, а, пересѣкая пирамиду FGHIK,—многоугольникъ *ghik*; требуется доказать, что

Чер. 294.



$$\frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } abcde}=\frac{\text{пл. } GHIK}{\text{пл. } ghik}.$$

Доказ. По предыдущей теоремѣ имѣемъ, что

$$\frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } abcde}=\frac{PQ^2}{PR^2} \text{ и } \frac{\text{пл. } GHIK}{\text{пл. } ghik}=\frac{PQ^2}{PR^2},$$

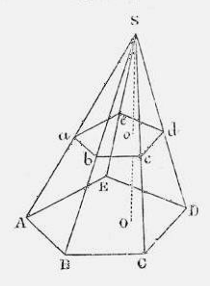
слѣд.

$$\frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } abcde}=\frac{\text{пл. } GHIK}{\text{пл. } ghik}.$$

Слѣдствіе. *Если основанія* ABCDE *и* GHIK *равномѣрны, то и площади сѣченій abcde и ghik также равномѣрны.*

§ 187. Если пирамиду SABCDE (чер. 295) разсѣчемъ плоскостью, параллельною основанію, то одна часть *sabcde* этой пирамиды, заключенная между площадью сѣченія и вершиною S данной пирамиды, есть также пирамида, а другая часть ABCDE*abcde*, заключенная между площадью сѣченія *abcde* и основаніемъ ABCDE данной пирамиды, есть многогранникъ, который называется *усѣченною* параллельно основанію *пирамидою*. Площадь ABCDE назыв. нижнимъ основаніемъ, а площадь *abcde* — верхнимъ основаніемъ этой пирамиды; разстояніе между верхнимъ и нижнимъ основаніями назыв. *высотою* усѣченной пирамиды. Боко-

Чер. 295.



выя стороны такой пирамиды всегда суть трапеціи, потому что прямыя AB, BC, CD,.... соотвѣтственно параллельны прямымъ *ab*, *bc*, *cd*.... (§ 163, слѣд. 1). Высоты этихъ трапецій называются *апоѳемами* усѣченной пирамиды. Усѣченная пирамида означается буквами, стоящими при вершинахъ всѣхъ тѣлесныхъ угловъ ея. Если правильную пирамиду разсѣчемъ плоскостью, параллельною основанію, то получится *правильная* усѣченная параллельно основанію пирамида; прямая, соединяющая центры многоугольниковъ основаній, назыв. *осью* усѣченной правильной пирамиды.

Равенство пирамидъ.

§ 188. **Теорема 1**. *Двѣ пирамиды равны между собою, если двугранный уголъ при основаніи одной пирамиды равенъ двугранному углу при основаніи другой пирамиды и грани, заключающія эти углы, соотвѣтственно равны и одинаково расположены.*

Даны двѣ пирамиды SABCDE и *sabcde* (чер. 296), въ которыхъ основаніе ABCDE равно основанію *abcde*, грань SAB равна грани *sab* и двугранный уголъ SBAE равенъ двугранному углу *sbae* и притомъ эти части расположены одинаково (т. е. въ равныхъ граняхъ равны соотвѣтственныя ребра пирамидъ); требуется доказать, что эти пирамиды равны, т. е. при наложеніи совмѣстятся.

Чер. 296.

Доказ. Если будемъ совмѣщать пирамиду *sabcde* съ пирамидою SABCDE, то основанія ихъ по равенству совпадутъ. По равенству двугранныхъ угловъ SBAE и *sbae* сторона *sab* пойдетъ по сторонѣ SAB. Вслѣдствіе равенства и одинаковаго расположенія граней треугольникъ *abs* совмѣстится съ треугольникомъ ABS; при этомъ ребро *sa* сольется съ ребромъ SA и ребро *sb*—съ ребромъ SB. Если же *sb* слилось съ SB и *bc* съ BC, то грань *sbc* совпадетъ съ гранью SBC. Такимъ же образомъ докажемъ, что остальныя грани и ребра пирамиды *sabcde* совпадутъ съ соотвѣтственными гранями и ребрами пирамиды SABCDE, и слѣд. эти пирамиды совмѣстятся.

Теорема 2. *Двѣ пирамиды равны, если три грани, составляющія трегранный уголъ одной пирамиды, соотвѣтственно равны тремъ гранямъ, составляющимъ трегранный уголъ другой пирамиды и притомъ эти части одинаково расположены.*

Даны двѣ пирамиды SABCDE и *sabcde* и дано, что основаніе ABCDE и стороны SAB и SAE, составляющія трегранный уголъ A первой пирамиды, одинаково расположены и соотвѣтственно равны основанію *abcde* и сторонамъ *sab* и *sae*, составляющимъ трегранный уголъ *a* второй пирамиды: требуется доказать, что данныя пирамиды равны.

Доказ. Вслѣдствіе одинакаго расположенія и равенства граней *abcde* и ABCDE, *sab* и SAB, *sae* и SAE, плоскіе углы BAE и *bae*, SAB и *sab*, SAE и *sae* равны; изъ равенства же этихъ плоскихъ угловъ слѣдуетъ (§ 169, теор. 1), что трегранные углы A и *a* равны, откуда заключаемъ, что и двугранные углы SBAE и *sbae* равны, а такъ какъ прилежащія къ этимъ послѣднимъ грани равны и одинаково расположены, то по предыдущей теоремѣ и данныя пирамиды равны.

Подобіе пирамидъ.

§ 189. Пирамиды наз. *подобными*, если двугранные углы одной пирамиды равны порознь двуграннымъ угламъ другой пирамиды, грани же ихъ соотвѣтственно подобны и одинаково расположены.

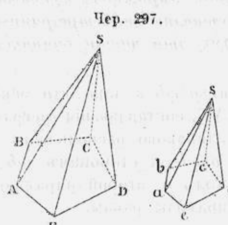
Изъ этого опредѣленія заключаемъ, что всѣ трегранные углы ихъ равны, потому что составлены изъ одинаково расположенныхъ плоскихъ угловъ (§ 169, теор. 1); а эти послѣдніе будутъ равны, потому что суть соотвѣтственные углы подобныхъ фигуръ. Ребра, соединяющія вершины равныхъ плоскихъ угловъ въ двухъ подобныхъ пирамидахъ, назыв. *сходственными*. Сходственныя ребра подобныхъ пирамидъ *пропорціональны*, потому что они суть сходственныя стороны подобныхъ фигуръ.

§ 190. **Теорема 1**. *Двѣ пирамиды подобны, если двугранный уголъ при основаніи въ одной равенъ двугранному углу при основаніи въ другой, и грани, составляющія эти углы, подобны и одинаково расположены.*

Въ пирамидахъ SABCDE и *sabcde* (чер. 297) дано, что

двугранный уголъ SABC равенъ двугранному углу *sabc*, а грани ABCDE и *abcde*, ASB и *asb* подобны; требуется доказать, что эти пирамиды подобны, т. е. что всѣ одинаково расположенныя грани подобны, а двугранные углы, заключенные между подобными гранями, равны.

Чер. 297.



Доказ. Такъ какъ данныя грани одинаково расположены, то $\angle ABC = \angle abc$ и $\angle ABS = \angle abs$; но по условію двугранные углы SABC и *sabc* равны, слѣд. и трегранные углы B и *b* также равны (§ 169, теор. 2). Изъ равенства же трегранныхъ угловъ B и *b* заключаемъ о равенствѣ плоскихъ угловъ SBC и *sbc*. Изъ подобія граней ABCDE и *abcde* имѣемъ (§ 95) что

$$AB : ab = BC : bc.$$

Изъ подобія граней ABS и *abs* имѣемъ (§ 92, тер.), что

$$AB : ab = BS : bs.$$

Изъ послѣднихъ двухъ пропорцій имѣемъ:

$$BC : bc = BS : bs \text{ (акс. I).}$$

Такимъ образомъ грани SBC и *sbc*, какъ треугольники, имѣющіе по равному углу, заключенному между пропорціональными сторонами, подобны(§ 93, теор. 3). Изъ равенства трегранныхъ угловъ B и *b* заключаемъ, что двугранные углы ASBC и *asbc*, SBCD и *sbcd* также равны. Подобнымъ образомъ докажемъ, что остальныя одинаково расположенныя боковыя грани подобны, и заключенные между подобными гранями двугранные углы равны, слѣдов. пирамиды подобны.

Теорема 2. *Двѣ пирамиды подобны, если три грани, составляющія трегранный уголъ одной пирамиды, подобны и одинаково расположены съ тремя гранями, составляющими трегранный уголъ другой пирамиды.*

Дано, что $ABCDE \backsim abcde$, $\triangle ASB \backsim \triangle asb$ и $\triangle BSC \backsim \triangle bsc$; требуется доказать, что пирамида SABCDE подобна пирамидѣ *sabcde*.

Доказ. Такъ какъ данныя подобныя грани одинаково расположены, то плоскіе углы трегранняго угла B равны плоскимъ угламъ трегранняго угла *b* и одинаково расположены;

слѣд. и самые трегранные углы B и *b* равны (§ 169, теор. 1); поэтому и двугранные углы этихъ трегранныхъ угловъ также равны и одинаково расположены. Такимъ образомъ данныя пирамиды имѣютъ по равному двугранному углу SABC и *sabc*, прилежащему къ основанію и заключенному между подобными гранями ABCDE и *abcde*, ASB и *asb*, а потому такія пирамиды по теоремѣ 1-й подобны.

Измѣреніе поверхностей пирамидъ.

§ 190. Мѣра полной поверхности всякой пирамиды равна суммѣ мѣръ площадей всѣхъ граней пирамиды. Мѣра боковой поверхности пирамиды равна суммѣ мѣръ боковыхъ граней ея. Изъ этого слѣдуетъ

Теорема. *Мѣра боковой поверхности правильной пирамиды равна длинѣ периметра основанія, умноженной на половину длины апоѳемы пирамиды*, какъ сумма мѣръ площадей равныхъ равнобедренныхъ треугольниковъ, высоты которыхъ суть равныя между собою апоѳемы пирамиды.

§ 191. Въ правильной усѣченной параллельно основанію пирамидѣ ABCDE*abcde* (чер. 298) всѣ боковыя ребра равны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ AB || *ab*, то AS : *a*S = BS : *b*S (§ 85, теор. 1, слѣд.)

Чер. 298.

или

$$\frac{AS - aS}{AS} = \frac{BS - bS}{BS} \quad \text{т. е.}$$

$$\frac{Aa}{AS} = \frac{Bb}{BS}$$

но AS = BS, слѣд. и A*a*=B*b*. Также докажемъ равенство остальныхъ боковыхъ реберъ.

Всѣ трапеціи, составляющія боковыя грани такой пирамиды равны между собою, потому что

$$\triangle ASB - \triangle asb = \triangle BSC - \triangle bsc = \ldots.$$

отсюда видно, что и высоты всѣхъ трапецій или апоѳемы правильной усѣченной пирамиды равны между собою. Изъ этого слѣдуетъ

Теорема. *Мѣра боковой поверхности правильной усѣченной пирамиды равна полусуммѣ длинъ периметровъ основаній ея, умноженной на длину апоѳемы* или равна *произведенію длины периметра сѣченія, раздѣляющаго боковыя ребра пополамъ, на длину апоѳемы.*

§ 192. **Теорема.** *Мѣры боковыхъ или полныхъ поверхностей подобныхъ пирамидъ относятся между собою, какъ квадраты сходственныхъ реберъ.*

Чер. 299.

Доказ. Такъ какъ площади подобныхъ треугольниковъ относятся между собою какъ квадраты сходственныхъ сторонъ (§ 104, теор. 2), то имѣемъ (чер. 299)

$$\frac{\triangle ASB}{\triangle asb}=\frac{AB^2}{ab^2},\ \frac{\triangle BSC}{\triangle bsc}=\frac{BC^2}{bc^2},$$

$$\frac{\triangle CSD}{\triangle csd}=\frac{CD^2}{cd^2},\ldots$$

откуда $\frac{\triangle ASB+\triangle BSC+\triangle CSD+\ldots}{\triangle asb+\triangle bsc+\triangle csd+\ldots}=\frac{AB^2}{ab^2}$.

Означимъ мѣры боковыхъ поверхностей пирамидъ SABCDE и *sabcde* чрезъ S и *s*, тогда послѣдняя пропорція приметъ видъ:

$$\frac{S}{s}=\frac{AB^2}{ab^2}.$$

Такъ какъ $\frac{\text{мѣра пл. } ABCDE}{\text{мѣра пл. } abcde}=\frac{AB^2}{ab^2}$ (§ 104, теор. 3), то

$$\frac{S+\text{мѣра пл. } ABCDE}{s+\text{мѣра пл. } abcde}=\frac{AB^2}{ab^2}.$$

Означивъ мѣры полныхъ поверхностей пирамидъ SABCDE и *sabcde* чрезъ S′ и *s*′, получимъ

$$\frac{S'}{s'}=\frac{AB^2}{ab^2}.$$

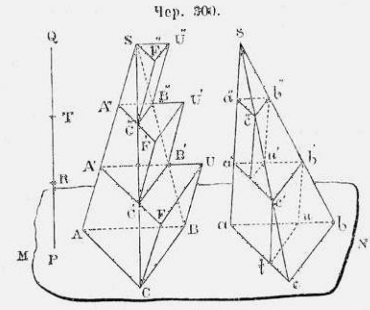
Измѣреніе объемовъ пирамидъ.

§ 193. **Теорема.** *Мѣры объемовъ двухъ треугольныхъ пирамидъ, имѣющихъ равномѣрныя основанія и равныя высоты, равны.*

Даны двѣ пирамиды SABC и *sabc* (чер. 300), имѣющія одну высоту PQ и равномѣрныя основанія ABC и *abc*, которыя лежатъ въ одной плоскости MN; требуется доказать, что мѣры объемовъ этихъ пирамидъ V и *v* равны.

Доказ. Предположимъ, что мѣры V и *v* объемовъ данныхъ пирамидъ SABC и *sabc* не равны и напр. $V > v$; пусть

Чер. 300.



разность $V-v=q$, гдѣ q есть число кубическихъ единицъ мѣръ и можетъ выражать мѣру объема нѣкотораго геометрическаго тѣла. Предположимъ, что q есть мѣра объема призмы, основаніе которой равно основанію ABC пирамиды SABC, а высота h, которая можетъ быть найдена изъ урав. $q=$ мѣрѣ пл. $\triangle ABC \cdot h$. Раздѣлимъ PQ на равныя части PR, RT и TQ меньшія h и чрезъ точки дѣленія R и T проведемъ плоскости, параллельныя основаніямъ, которыя, пересѣкаясь съ пирамидою SABC, дадутъ треугольники A′B′C′ и A″B″C″, а съ пирамидою *sabc*—треугольники $a'b'c'$ и $a''b''c''$. На площадяхъ треугольниковъ ABC, A′B′C′ и A″B″C″ построимъ выходящія призмы AU, A′U′ и A″U″, а на площадяхъ треугольниковъ $a'b'c'$ и $a''b''c''$ построимъ входящія призмы ab' и $a'b''$; высоты какъ входящихъ, такъ и выходящихъ призмъ будутъ равны, пот. что PR=RT=TQ.

Означимъ мѣры объемовъ призмъ AU, A′U′, A″U″ соотвѣтственно чрезъ m, m_1, m_2, а мѣры объемовъ призмъ ab' и $a'b''$ чрезъ n и n_1. Изъ построенія будемъ имѣть, что

$$V < m+m_1+m_2 \quad \text{и} \quad n+n_1 < v,$$

сложивъ эти неравенства, получимъ:

$$V+(n+n_1) < (m+m_1+m_2)+v$$

или, отнимая отъ обѣихъ частей послѣдняго неравенства $v+(n+n_1)$ (акс. 3), найдемъ, что

$$V-v < m+m_1+m_2-n-n_1.$$

Но $m_1=n$, потому что призмы A'U' и ab' имѣютъ равныя высоты RT=PR и равномѣрныя основанія A'B'C' и $a'b'c'$ (§ 186, теор. 2, слѣд.); точно также докажемъ, что $m_2=n_1$; тогда получимъ, что $V-v<m$.

Такъ к. $V-v=q=$мѣра пл. △ABC.h и $m=$мѣра пл. △ABC.PR, то мѣра пл. △ABC.h < мѣра пл. △ABC.PR или h < PR, что невозможно, потому что PR < h какъ выше сказано.

Подобнымъ образомъ придемъ къ нелѣпости, если предположимъ, что $V<v$; слѣдов. $V=v$. (акс. 9).

§ 194. **Теорема 1.** *Мѣра объема всякой треугольной пирамиды равна трети произведенія мѣры площади основанія на высоту.*

Дана треугольная пирамида SABC (чер. 301); требуется доказать, что мѣра объема ея V=B.H, гдѣ B есть мѣра площади основанія ABC данной пирамиды, а H—высота ея SP.

Чер. 301.

Доказ. Строимъ призму $abcdef$, которая имѣетъ основаніе abc, равное основанію ABC данной пирамиды SABC и высоту dp = SP. Проведемъ чрезъ ребро ab и вершину тѣлеснаго угла d призмы плоскость adb, которая раздѣлитъ эту призму на двѣ пирамиды: одну — треугольную $abcd$, имѣющую основаніемъ △ abc и вершину въ точкѣ d, другую — четыреугольную $abefd$, имѣющую основаніемъ параллелограммъ $abef$ и вершину также въ d. Затѣмъ, проведемъ чрезъ прямыя ad и dc плоскость ade, которая четыреугольную пирамиду $abefd$ раздѣлитъ на двѣ треугольныя пирамиды $abed$ и $acfd$, которыя равномѣрны, потому что имѣютъ равныя основанія abe и afe и одну и ту же высоту—перпендикуляръ, опущенный изъ d на плоскость $abef$ (§ 193). Если за основаніе пирамиды $acfd$ примемъ площадь треугольника dcf, а за вершину точку a, то эта пирамида будетъ равномѣрна пирамидѣ $abcd$ (§ 193), потому что онѣ имѣютъ равныя основанія abc и def (§ 173) и общую высоту dp, заключенную между параллельными основаніями. Такимъ образомъ всѣ три пира-

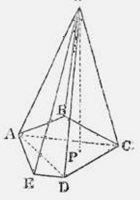
миды $abcd$, $abed$, $acfd$ равномѣрны между собою; слѣд. мѣра объема каждой изъ нихъ есть треть мѣры объема призмы $abcdef$. Объемъ призмы $abcdef$ равенъ произведенію мѣры площади основанія abc на длину высоты dp, поэтому мѣра объема пирамиды $abcd$ равна $\frac{\text{мѣрѣ пл.} \triangle abc \,.\, dp}{3}$. Мѣры объемовъ пирамидъ $abcd$ и SABC равны, потому что по построенію основанія и высоты ихъ равны, поэтому мѣра объема V пирамиды SABC равна $\frac{\text{мѣра пл.} \triangle abc \,.\, dp}{3}$ или

$$V=\frac{\text{мѣра пл.} \triangle ABC \,.\, DP}{3} \quad \text{или} \quad V=\frac{B \,.\, H}{3}.$$

Теорема 2. *Мѣра объема всякой многоугольной пирамиды равна трети произведенія мѣры площади основанія на высоту.*

Дана многоугольная пирамида SABCDE (чер. 302); требуется доказать, что мѣра объема V этой пирамиды равна $\frac{B \,.\, H}{3}$, гдѣ B есть мѣра площади основаніе ABCDE данной пирамиды, а H—высота SP ея.

Чер. 302.



Доказ. Проведемъ чрезъ какое нибудь ребро AS пирамиды діагональныя плоскости ASD и ASC, которыя эту пирамиду раздѣлятъ на треугольныя пирамиды, имѣющія высотою высоту данной пирамиды SP=H. Тогда будемъ имѣть по предыдущему §, что

$$\text{мѣра объема пирамиды SABC} = \frac{\text{мѣрѣ пл. ABC.H}}{3}$$

$$\text{„ \quad „ \quad „ \quad SACD} = \frac{\text{мѣрѣ пл. ACD.H}}{3}$$

$$\text{„ \quad „ \quad „ \quad SADE} = \frac{\text{мѣрѣ пл. ADE.H}}{3}$$

Сложивъ эти равенства, получимъ, что

$$V=\frac{(\text{мѣра пл. ABC}+\text{мѣра пл. ACD}+\text{мѣра пл. ADE})\text{H}}{3}=\frac{\text{B.H}}{3}$$

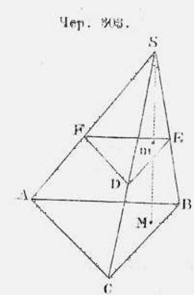
Слѣдствіе 1. *Отношеніе объемовъ двухъ пирамидъ равно произведенію отношенія площадей ихъ основаній на отношеніе высотъ пирамидъ.*

Слѣдствіе 2. *Если основаніе пирамиды постоянно, а высота измѣняется, то объемъ пирамиды пропорціоналенъ высотѣ. Если же высота пирамиды постоянна, основаніе измѣняется, то объемъ пирамиды пропорціоналенъ площади основанія.*

§ 195. **Теорема**. *Мѣра объема треугольной пирамиды, усѣченной плоскостью параллельно основанію, равна суммѣ мѣръ объемовъ трехъ пирамидъ, которыя имѣютъ высоту общую съ высотою усѣченной пирамиды, а основанія: одна— нижнее, другая—верхнее основаніе усѣченной пирамиды, а третья—среднее пропорціональное между этими основаніями.*

Дана усѣченная параллельно основанію треугольная пирамида ABCDEF (чер. 303); треб. доказ. что мѣра объема этой пирамиды $V=\frac{Bh}{3}+\frac{bh}{3}+\frac{\sqrt{Bb}\,.\,h}{3}=\frac{(B+b+\sqrt{Bb})\,h}{3}$,

Чер. 303.



гдѣ B есть мѣра площади нижняго основанія ABC, b—мѣра площади верхняго основанія DEF и h—высота mM усѣченной пирамиды ABCDEF.

Доказ. Данную усѣченную пирамиду ABCDEF достроимъ до полной SABC; при этомъ получится отсѣченная пирамида SFDE. Означимъ мѣры объемовъ пирамидъ SABC и SFDE соотвѣтственно чрезъ V и V'; мѣру площади основанія FDE чрезъ b, высоты SM и sm—соотвѣтственно чрезъ H и H'. Очевидно, что $v=V-V'$. Такъ какъ $V=\frac{BH}{3}$ и $V'=\frac{bH'}{3}$ (§ 194, теор. 1), то $v=\frac{BH-bH'}{3}$, но изъ чертежа видно, что $H'=H-h$, слѣд.

$$v=\frac{BH-bH+bh}{3}=\frac{(B-b)\ H+bh}{3}.$$

Площади сѣченій пирамиды относятся, какъ квадраты разстояній этихъ сѣченій отъ вершины пирамиды (§ 186, теор. 1), поэтому

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle FDE}=\frac{SM^2}{sm^2} \text{ или } \frac{B}{b}=\frac{H^2}{(H-h)^2} \text{ или } \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}}=\frac{H}{H-h};$$

откуда $H(\sqrt{B}-\sqrt{b})=h\sqrt{B}$; умноживъ обѣ части равенства на $\sqrt{B}+\sqrt{b}$, получимъ:

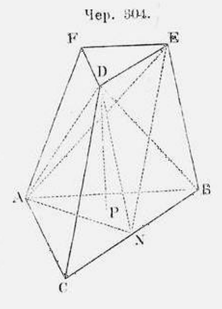
$$H\ (B-b)=h\sqrt{B}(\sqrt{B}+\sqrt{b})=hB+h\sqrt{Bb}.$$

Вставляя въ выраженіе v вмѣсто $(B-b)H$ количество $hB+h\sqrt{Bb}$, будемъ имѣть:

$$V=\frac{Bh+h\sqrt{Bb}+bh}{3}=\frac{(B+b+\sqrt{Bb})h}{3}$$

Другое доказ. Чрезъ ребро AB и вершину D усѣченной пирамиды ABCDEF (чер. 304) проведемъ плоскость ABD, которая разсѣчетъ эту пирамиду на двѣ пирамиды: одну—треугольную ABCD, имѣющую основаніемъ нижнее основаніе ABC данной пирамиды и высоту DP общую съ ней, другую—четыреугольную ABEFD, имѣющую основаніемъ трапецію ABEF и вершину въ точкѣ D. Затѣмъ, чрезъ прямыя AD и ED проведемъ плоскость ADE, которая разсѣчетъ пирамиду ABEFD на двѣ треугольныя пирамиды AEFD и ABED. За основаніе треугольной пирамиды AEFD примемъ верхнее основаніе DEF данной усѣченной пирамиды и за вершину точку A; тогда очевидно, что эта пирамида AEFD будетъ имѣть высоту DP общую съ высотой данной усѣченной пирамиды. За основаніе третьей пирамиды ABED примемъ AEB и за вершину ея точку D. Мѣра объема пирамиды ABCD равна $\frac{B\,.\,h}{3}$, а пирамиды DEFA—$\frac{bh}{3}$; остается доказать, что мѣра объема третьей пирамиды ABED равна $\frac{\sqrt{Bb}\,.\,h}{3}$. Для доказательства проведемъ въ плоскости BCDE параллельно ребру BE изъ точки D прямую DN до пересѣченія съ ребромъ BC. Эта прямая DN будетъ параллельна плоскости ABE, потому что она могла бы встрѣтить эту плоскость только въ какой нибудь точкѣ прямой BE, такъ какъ съ нею находится въ одной плоскости BCDE, что невозможно. Затѣмъ, если точку N соединимъ съ точками A и E, то опредѣлится пирамида ABEN, имѣющая вершину въ точкѣ N и основаніе ABE, общее съ пирамидою ABED и общую съ ней высоту, потому что ихъ вершины D и N лежатъ на прямой DN, параллельной ихъ общему основанію ABE. Отсюда слѣдуетъ, что пирамида ABED равномѣрна пирамидѣ ABEN (§ 193). Если примемъ за основаніе пирамиды ABEN площадь

Чер. 304.



треугольника ABN и за вершину точку E, то высота этой пирамиды будетъ общая съ высотой данной усѣченной пирамиды. Докажемъ, что основаніе ABN есть среднее пропорціональное между верхнимъ и нижнимъ основаніемъ усѣченной пирамиды. Такъ какъ площади треугольниковъ, имѣющихъ по равному углу, относятся между собою, какъ произведенія сторонъ, заключающихъ равные углы, то

$$\frac{\text{пл. } \triangle ABC}{\text{пл. } \triangle ABN}=\frac{AB.BC}{AB.BN}=\frac{BC}{BN}=\frac{BC}{DE}$$

$$\frac{\text{пл. } \triangle ABN}{\text{пл. } \triangle DEF}=\frac{AB.BN}{FE.DE}=\frac{AB}{FE}.$$

Такъ какъ въ подобныхъ треугольникахъ стороны пропорціональны (§ 92, теор.), то $\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{FE}$.

Если же вторыя отношенія въ двухъ первыхъ пропорціяхъ равны, то и первыя отношенія этихъ пропорцій также равны, т. е.

$$\frac{\text{пл. } \triangle ABC}{\text{пл. } \triangle ABN}=\frac{\text{пл. } \triangle ABN}{\text{пл. } \triangle DEF}, \text{ или}$$

$$\frac{B}{\text{мѣра пл. } \triangle ABN}=\frac{\text{мѣра пл. } \triangle ABN}{b}, \text{ откуда}$$

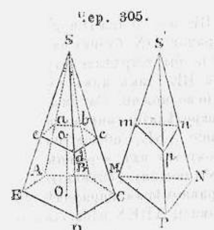
мѣра пл. $\triangle ABN=\sqrt{B.b}$.

Слѣд. мѣра объема третьей пирамиды $ABEN=\frac{h\sqrt{Bb}}{3}$. Такъ какъ мѣра объема v усѣченной пирамиды равна суммѣ мѣръ объемовъ пирамидъ ABCD, DEFA и ABED, то

$$v=\frac{Bh}{3}+\frac{bh}{3}+\frac{h\sqrt{Bb}}{3} \text{ или } v=(B+b+\sqrt{Bb})\frac{h}{3}.$$

Теорема 2. *Мѣра объема всякой усѣченной параллельно основанію пирамиды равна суммѣ мѣръ объемовъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ высоту, общую съ усѣченной пирамидой, а основаніе одной есть нижнее, другой — верхнее основаніе данной усѣченной пирамиды, а третьей — среднее пропорціональное между ними.*

Чер. 305.



Дана многоугольная усѣченная парал. основанію пирамида ABCDE$abcde$ (чер. 305); докажемъ, что мѣра объема ея равна $h/_3(B+b+\sqrt{Bb})$, гдѣ B есть мѣра пл. основанія ABCDE, b — мѣра пл. основанія $abcde$ усѣченной пирамиды, h — высота ея Oo.

Доказ. Данную усѣченную пирамиду ABCDE$abcde$ достроимъ до полной пирамиды SABCDE; на продолженной плоскости ABCDE построимъ треугольную пирамиду S'MNP, основаніе которой MNP равномѣрно основанію ABCDE пирамиды SABCDE и высота общая съ ней. Затѣмъ, продолжимъ плоскость сѣченія $abcde$ до пересѣченія съ боковыми гранями пирамиды S'MNP, которая въ сѣченіи даетъ треугольникъ mnp. Сѣченія $abcde$ и mnp будутъ по § 186 равномѣрны, слѣдов. и пирамиды S$abcde$ и S'mnp—равномѣрны (§ 194); а потому объемы усѣченныхъ пирамидъ ABCDE$abcde$ и MNPmnp также равномѣрны (акс. 2). Мѣра объема пирамиды MNPmnp по предыдущему параграфу равна

$$\frac{h}{3}(MNP+mnp+\sqrt{MNP\,.\,mnp}),$$

слѣд. мѣра объема данной усѣченной пирамиды

$$v=\frac{h}{3}(MNP+mnp+\sqrt{MNP\,.\,mnp});$$

но, по построенію,

мѣра пл. $\triangle MNP$=мѣрѣ пл. многоуг. ABCDE=B,
мѣра пл. $\triangle mnp$=мѣрѣ пл. многоуг. $abcde=b$;

$$\text{слѣд. } v=\frac{h}{3}(B+b+\sqrt{B\,.\,b}).$$

§ 196. **Теорема**. *Мѣра объема треугольной призмы, усѣченной непараллельно основанію, равна мѣрѣ объема пирамиды, имѣющей основаніе, общее съ усѣченной призмой, а высоту, равную суммѣ разстояній вершинъ непараллельнаго сѣченія отъ этого основанія.*

Дана наклонная треугольная призма ABCDEF (чер. 306), усѣченная непараллельно основанію ABC. Означимъ чрезъ V, B, l_1, l_2, l_3, соотвѣтственно мѣру объема этой призмы, мѣру площади основанія ея и разстоянія вершинъ D, E и F непараллельнаго сѣченія DEF отъ основанія ABC. Требуется доказать, что

$$V=B\,.\,\frac{l_1+l_2+l_3}{3}.$$

Доказ. Чрезъ вершину D непараллельнаго сѣченія, ближайшую къ основанію ABC, проведемъ плоскость DMN параллельную основанію призмы. Эта плоскость разсѣчетъ усѣченную призму на призму ABCMND, и на четырегранную пирамиду DMNEF.

Чер. 306.

Чрезъ ребро DE и DM проведемъ плоскость, которая четырегранную пирамиду DMNEF разсѣчетъ на двѣ трегранныя DMNE и DMFE. Если въ пирамидѣ DMNE примемъ за вершину точку E, а за основаніе △DMN и означимъ чрезъ l'_2 разстояніе E отъ △DMN, то мѣра объема v' этой пирамиды будетъ (§ 194)

$$v' = \text{мѣрѣ пл. } \triangle DMN. \frac{l'_2}{3}.$$

Пирамида DMFE равномѣрна пирамидѣ DMFN, которая отсѣчется, если проведемъ плоскость чрезъ точки D, F и N; потому что эти двѣ пирамиды имѣютъ общее основаніе DMF и одинаковую высоту, такъ какъ обѣ вершины E и N лежатъ на ребрѣ EN, параллельномъ основанію DMF. Если въ пирамидѣ DMFN примемъ за вершину точку F, а за основаніе — △DMN, и означимъ разстояніе F отъ △DMN чрезъ l'_3, то мѣра объема v'' этой пирамиды, а слѣд. и пирамиды DMFE, будетъ (§ 194)

$$v'' = \text{мѣрѣ пл. } \triangle DMN. \frac{l'_3}{3}.$$

Замѣтивъ, что мѣра объема v призмы ABCMND равна мѣрѣ пл. △ABC, умноженной на l_1 и, что △DMN = △ABC (§ 173), будемъ имѣть, по построенію, что $V=v+v'+v''$ или

$$V=B.\left(l_1+\frac{l'_2}{3}+\frac{l'_3}{3}\right)=B.\left(\frac{3l_1+l'_2+l'_3}{3}\right)=$$

$$=B.\left(\frac{l_1}{3}+\frac{l_1+l'_2}{3}+\frac{l_1+l'_3}{3}\right) \text{ или}$$

$$V=B.\left(\frac{l_1+l_2+l_3}{3}\right),$$

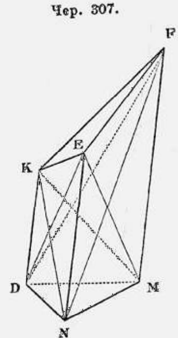
потому что изъ чертежа видно, что $l_1+l'_2=l_2$ и $l_1+l'_3=l_3$.

Слѣдствіе. Изъ послѣдней формулы слѣдуетъ, что *мѣра объема призмы, усѣченной непараллельно основанію, равна суммѣ мѣръ трехъ пирамидъ, изъ которыхъ каждая имѣ-*

етъ основаніе, общее съ усѣченной пирамидой, и вершину въ одной изъ вершинъ непараллельнаго сѣченія.

Это слѣдствіе можно доказать непосредственно. Усѣченную пирамиду DMNEFK (чер. 307) разсѣчемъ плоскостью, проходящею чрезъ точки D, E и M, на двѣ пирамиды: трегранную EDMN и четырегранную EDMFK, которая въ свою очередь раздѣлится плоскостью, проведенною чрезъ точки D, E и F, на двѣ трегранныя пирамиды EDMF и EDKF. Въ первой пирамидѣ EDMN за основаніе примемъ △DMN, основаніе призмы и за вершину—вершину E непараллельнаго сѣченія.

Чер. 307.



Вторую пирамиду EDMF замѣнимъ равномѣрною ей пирамидою NDMF, которая отсѣкается отъ призмы плоскостью, проходящею чрезъ точки D, N и F. Равномѣрность же этихъ пирамидъ видна изъ того, что онѣ имѣютъ общее основаніе △DMF и вершины E и N лежатъ на ребрѣ EN, параллельномъ грани DKFM. Въ пирамидѣ NDMF примемъ за основаніе — △DMN, основаніе призмы, и за вершину — вершину F непараллельнаго сѣченія.

Третью пирамиду EDKF замѣнимъ пирамидою NDKM, которая отсѣчется отъ призмы плоскостью, проведенною чрезъ точки K, N и M. Равномѣрность этихъ пирамидъ слѣдуетъ изъ того, что вершины ихъ E и N лежатъ на прямой EN, параллельной плоскости DKFM, въ которой лежатъ основанія этихъ пирамидъ и самыя основанія ихъ DKF и DKM суть равномѣрные треугольники, такъ какъ имѣютъ общее основаніе DK и равныя высоты, заключенныя между параллельными линіями KD и MF. Въ пирамидѣ NDKM примемъ за основаніе △DMN, основаніе призмы, и за вершину — вершину K непараллельнаго сѣченія.

Замѣчаніе. Если непараллельное сѣченіе пройдетъ чрезъ точку D, т. е. если K совпадаетъ съ D, то пирамида EDKF изчезнетъ и мѣра объема оставшейся четыреугольной пира-

миды опредѣлится подобно тому, какъ мѣра объема отсѣченной четырегранной пирамиды DMNEF въ чер. 306.

§ 197. Теорема. *Мѣры объемовъ подобныхъ пирамидъ относятся между собою какъ кубы сходственныхъ реберъ.*

Чер. 308.

Чрезъ V, B и H означимъ соотвѣтственно мѣру объема, мѣру площади основанія и высоту SO пирамиды SABCDE (чер. 308); чрезъ v, b и h означимъ тѣ же величины для пирамиды *sabcde*, подобной первой пирамидѣ, и докажемъ, что

$$\frac{V}{v}=\frac{AB^3}{ab^3}.$$

Доказ. На основаніи слѣд. I § 194 имѣемъ, что

$$\frac{V}{v}=\frac{B}{b}\cdot\frac{H}{h} \quad (1).$$

Изъ подобія пирамидъ SABCDE и *sabcde* слѣдуетъ, что трегранные углы A и a равны между собою и грани этихъ угловъ одинаково расположены, а поэтому A и a при наложеніи совмѣстятся, причемъ ребро ab пойдетъ по ребру AB, ae—по AE и as—по AS. Изъ этого можно заключить, что уголъ прямой AS съ плоскостью основанія ABCDE равенъ углу прямой as съ плоскостью основанія $abcde$, т. е. $\angle SAO=\angle sao$ (§ 156).

Прямоугольные треугольники SAO и sao подобны, потому что $\angle SAO=\angle sao$ (§ 93, теор. 4, слѣд. 2), откуда

$$\frac{SO}{so}=\frac{SA}{sa}, \text{ но } \frac{SA}{sa}=\frac{AB}{ab} \text{ (§ 189); слѣд. } \frac{H}{h}=\frac{AB}{ab}.$$

При этомъ имѣемъ: $\frac{B}{b}=\frac{AB^2}{ab^2}$ (§ 104, теор. 3).

Вставляя въ пропорцію (1) вмѣсто $\frac{B}{b}$ и $\frac{H}{h}$ ихъ выраженія, получимъ: $\frac{V}{v}=\frac{AB^3}{ab^3}$.

Понятіе о правильныхъ многогранникахъ.

§ 198. Правильными многогранниками наз. многогранники, которые ограничены равными правильными геометрическими фигурами и имѣютъ всѣ многогранные углы равные между собою. *Центромъ* правильнаго многогранника наз. точка, которая находится внутри многогранника и равно отстоитъ отъ вершинъ тѣлесныхъ угловъ его.

По § 168 во всякомъ тѣлесномъ углѣ сумма плоскихъ угловъ менѣе $4d$, а потому для того, чтобы можно было изъ правильныхъ геометрическихъ фигуръ составить тѣлесный уголъ, т. е. чтобы эти фигуры сходились вершинами въ одной точкѣ — вершинѣ тѣлеснаго угла, необходимо, чтобы сумма плоскихъ угловъ при этой вершинѣ была менѣе $4d$. Откуда заключаемъ, что

1) изъ равныхъ правильныхъ треугольниковъ можетъ быть составлено три тѣлесныхъ угла, а именно:

a) изъ трехъ равныхъ правильныхъ треугольниковъ, потому что сумма плоскихъ угловъ такого тѣлеснаго угла равна $\frac{2}{3}d\times 3=2d$;

b) изъ четырехъ равныхъ правильныхъ треугольниковъ, потому что сумма плоскихъ угловъ такого тѣлеснаго угла равна $\frac{2}{3}d\times 4=2\frac{2}{3}d$;

c) изъ пяти равныхъ правильныхъ треугольниковъ, такъ какъ сумма плоскихъ угловъ такого тѣлеснаго угла равна $\frac{2}{3}d\times 5=3\frac{1}{3}d$.

2) Изъ равныхъ квадратовъ можетъ быть составленъ только одинъ тѣлесный уголъ, а именно изъ — трехъ квадратовъ, потому что сумма плоскихъ угловъ такого угла равна $3d$.

3) Изъ равныхъ правильныхъ пятиугольниковъ можетъ быть составленъ только одинъ тѣлесный уголъ, а именно — изъ трехъ правильныхъ пятиугольниковъ, потому что сумма плоскихъ угловъ такого угла равна $\frac{6}{5}d\times 3=3\frac{3}{5}d$.

Тѣлесный уголъ правильнаго многогранника не можетъ быть составленъ:

1) изъ шести правильныхъ треугольниковъ, потому что сумма плоскихъ угловъ такого тѣлеснаго угла равнялась бы $\frac{2}{3}d\times 6=4d$, что не возможно.

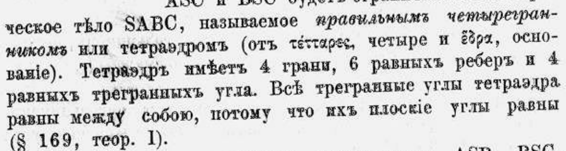
2) Изъ четырехъ квадратовъ, потому что сумма плоскихъ угловъ такого тѣлеснаго угла равнялась бы $4d$, что не возможно.

3) Изъ четырехъ правильныхъ пятиугольниковъ, потому что сумма плоскихъ угловъ такого тѣлеснаго угла равнялась бы $^6/_5 d \times 4 = 4^4/_5 d$, что не возможно.

4) Изъ трехъ правильныхъ шестиугольниковъ, и вообще изъ правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ болѣе пяти сторонъ, потому что сумма плоскихъ угловъ такихъ тѣлесныхъ угловъ будетъ болѣе $4d$.

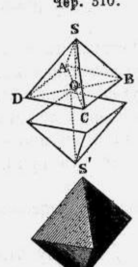
§ 199. Три правильныхъ треугольника ASB, ASC и BSC, (чер. 309), которые сходятся своими вершинами въ одной точкѣ S, образуютъ трегранный тѣлесный уголъ S, а три основанія этихъ треугольниковъ AB, BC и AC составляютъ правильный треугольникъ ABC, который вмѣстѣ съ остальными тремя равными ему правильными треугольниками ASB, ASC и BSC будетъ ограничивать геометрическое тѣло SABC, называемое *правильнымъ четырегранникомъ* или тетраэдромъ (отъ τέτταρες, четыре и ἕδρα, основаніе). Тетраэдръ имѣетъ 4 грани, 6 равныхъ реберъ и 4 равныхъ трегранныхъ угла. Всѣ трегранные углы тетраэдра равны между собою, потому что ихъ плоскіе углы равны (§ 169, теор. I).

Чер. 309.



§ 200. Четыре правильныхъ треугольника ASB, BSC, CSD и ASD (чер. 310), сходящіеся своими вершинами въ одной точкѣ—вершинѣ четырегранпаго тѣлеснаго угла S, составляютъ своими основаніями AB, BC, CD и DA четыреугольникъ ABCD. Изъ вершины тѣлеснаго угла S опустимъ перпендикуляръ SO на площадь четыреугольника ABCD и замѣтимъ, что AS=BS=CS==DS, то по § 151 теор. 2 найдемъ, что AO=BO=CO=DO; кромѣ того AB==BC=DC=DA; слѣд. четыреугольникъ ABCD есть квадратъ, площадь котораго примемъ за основаніе пятигранника SABCD. Если возьмемъ составленный подобнымъ образомъ другой пятигранникъ S′, равный пятиграннику SABCD, и сложимъ ихъ квадратными основаніями то получимъ *правильный восьмигранникъ* или *октаэдръ* (отъ ὀκτώ, восемь, и

Чер. 310.

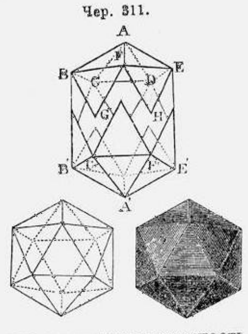


ἕδρα, основаніе). Октаэдръ имѣетъ 8 граней, 12 равныхъ между собою реберъ и 6 равныхъ между собою четырегранныхъ угловъ.

§ 201. Правильный многогранникъ, въ которомъ каждый тѣлесный уголъ составленъ изъ 5 правильныхъ треугольниковъ, наз. *икосаэдромъ* (отъ εἴκοσι, двадцать, и ἕδρα, основаніе) или *двадцатигранникомъ*. Онъ имѣетъ 20 граней, 30 реберъ и 12 пятигранныхъ угловъ.

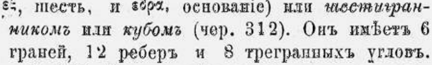
Чтобы имѣть понятіе о строеніи этого многогранника, вообразимъ себѣ 5 равныхъ равностороннихъ треуг. ABC, ACD, ADE, AEF, AFB (чер. 311), образующихъ пятигранный тѣлесный уголъ, вершина котораго есть A—точка, въ которой совпадаютъ вершины всѣхъ этихъ треугольниковъ; затѣмъ вообразимъ себѣ, что къ основанію каждаго изъ этихъ треугольниковъ привѣшанъ такой же треугольникъ и притомъ такъ, чтобы основанія ихъ сливались, т. е. къ основанію BF треугольника ABF прикрѣпленъ своимъ основаніемъ BF треугольникъ GBF = △ ABF, къ основанію FE треугольника AFE прикрѣпленъ своимъ основаніемъ FE треугольникъ HFE==△AFE, и т. д. Такимъ образомъ получится поверхность, составленная изъ 10 равныхъ равностороннихъ треугольниковъ. Потомъ, вообразимъ себѣ совершенно такую же вторую поверхность состоящую изъ 10 равностороннихъ треугольниковъ, равныхъ между собою и равныхъ треугольникамъ первой поверхности, но вершина A′ тѣлеснаго угла ея обращена внизъ. Наконецъ, приведемъ въ совпаденіе вершины привѣшанныхъ треугольниковъ одной поверхности съ вершинами основаній треугольниковъ составляющихъ тѣлесный уголъ другой поверхности, такъ: вершину G треугольника BFG приведемъ въ совпаденіе съ вершиною C′ треугольника A′C′B′; вершину H треугольника HFE приведемъ въ совпаденіе съ вершиною F′ треугольника A′F′E′ и т. д. Такимъ образомъ получимъ поверхность, ограничивающую тѣло, называемое икосаэдромъ.

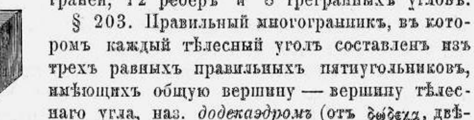
Чер. 311.



§ 202. Правильный многогранникъ, въ которомъ каждый тѣлесный уголъ составленъ изъ трехъ квадратовъ, имѣющихъ одну общую вершину—вершину тѣлеснаго угла, наз. *гексаэдромъ* (отъ ἕξ, шесть, и ἕδρα, основаніе) или *шестигранникомъ* или *кубомъ* (чер. 312). Онъ имѣетъ 6 граней, 12 реберъ и 8 трегранныхъ угловъ.

Чер. 312.

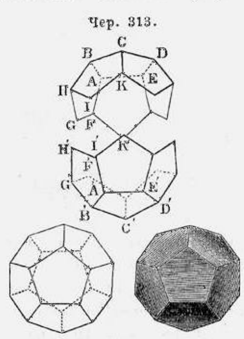




§ 203. Правильный многогранникъ, въ которомъ каждый тѣлесный уголъ составленъ изъ трехъ равныхъ правильныхъ пятиугольниковъ, имѣющихъ общую вершину — вершину тѣлеснаго угла, наз. *додекаэдромъ* (отъ δώδεκα, двѣнадцать, и ἕδρα, основаніе) или *двѣнадцатигранникомъ*. Онъ имѣетъ 12 граней, 30 реберъ и 20 трегранныхъ угловъ.

Чтобы имѣть понятіе о строеніи этого многогранника, вообразимъ себѣ, что къ каждой сторонѣ правильнаго пятиугольника ABCDE (чер. 313), лежащаго въ горизонтальной плоскости, привѣшанъ одною стороною равный данному равносторонній пятиугольникъ: такъ къ сторонѣ AB пятиугольника ABCDE привѣсимъ стороною AB пятиугольникъ ABHGF; къ сторонѣ BC—стороною BC привѣсимъ пятиугольникъ BCKIH и т. д.; притомъ 5 послѣднихъ пятиугольниковъ расположены такъ, что каждые два прилежащіе, т. е. имѣющіе общую вершину, имѣютъ одно общее ребро, проходящее чрезъ эту вершину, напр. ABHGF и BCKIH, имѣющіе общую вершину B, имѣютъ общее ребро BH. Полученная поверхность имѣетъ 6 граней. Потомъ вообразимъ себѣ совершенно такую же вторую поверхность, составленную также изъ 6 правильныхъ пятиугольниковъ, равныхъ между собою и пятиугольникамъ первой поверхности. Наконецъ, сложимъ эти двѣ поверхности такъ, чтобы пятиугольники ABCDE и A′B′C′D′E′ лежали въ параллельныхъ плоскостяхъ, и вершины F, G, H, I, K.... совпали соотвѣтственно съ F′, G′, H′, I′, K′......
Такимъ образомъ получимъ поверхность, ограничивающую тѣло, называемое додекаэдромъ.

Чер. 313.



ОТДѢЛЪ XIV.

Тѣла вращенія.

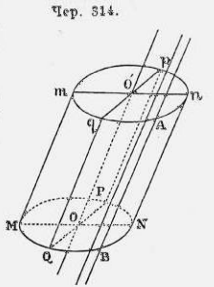
Виды и свойства цилиндра.

§ 204. Если прямая AB (чер. 314) движется, оставаясь постоянно параллельною своему первоначальному направленію, и притомъ какая нибудь точка ея B движется по нѣкоторой плоской кривой линіи, въ плоскости которой не лежитъ прямая, напр. по окружности O, то эта прямая AB образуетъ поверхность, называемую *цилиндрической*. Въ этомъ случаѣ прямая AB наз. *образующею*, а окружность O — *управляющею* линіею цилиндрической поверхности.

§ 205. **Теорема.** *Если цилиндрическую поверхность пересѣчемъ плоскостью, параллельною управляющему кругу, то въ сѣченіи получится окружность того же радіуса.*

Доказ. Чрезъ центръ O управляющаго круга проведемъ параллельно образующей прямую OO′, которая пересѣчетъ плоскость сѣченія въ точкѣ O′. Затѣмъ чрезъ эту прямую OO′ проведемъ плоскость $MmnN$, которая пересѣчетъ цилиндрическую поверхность по образующимъ Mm и Nn, а плоскость круга O и плоскость сѣченія — по MN и mn. Прямыя Mm и Nn параллельны, какъ образующія, а прямыя MN и mn параллельны, какъ прямыя пересѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей третьею плоскостью (§ 163, слѣд. 1); слѣд. четыреугольники $MmO'O$ и $NnO'O$ суть параллелограммы (§ 58); откуда заключаемъ, что $MO=mO'$ и $NO=nO'$. Если чрезъ ту же прямую OO′ проведемъ другую плоскость $PQqp$, то, по той же причинѣ, четыреугольники $PpO'O$ и $QqO'O$ суть параллелограммы, а потому $PO=pO'$ и $QO=qO'$; но такъ какъ $MO=NO=PO=QO$, слѣд. и $mO'=nO'=pO'=qO'$ т. е. сѣченіе $mpnq$, параллельное управляющему кругу, есть также окружность, радіусъ которой равенъ радіусу управляющаго круга, а центръ лежитъ въ точкѣ O′.

Чер. 314.



§ 206. Тѣло, ограниченное цилиндрическою поверхностью, управляющимъ кругомъ и параллельнымъ ему кругомъ сѣченія, наз. *цилиндромъ* (κύλινδρος,—отъ κυλίνδω, верчу.) Круги O и O′ наз. основаніями цилиндра; прямая OO′, соединяющая центры основаній, — *осью* цилиндра; разстояніе между основаніями—*высотою* цилиндра.

Если образующая цилиндра перпендикулярна къ управляющему кругу, то цилиндръ наз. *прямымъ* и высота его въ этомъ случаѣ равна оси его.

Образованіе прямаго цилиндра можно объяснить еще другимъ образомъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть прямоугольникъ ABCD (чер. 315) вращается около одной изъ сторонъ его CD, тогда другая сторона AB опишетъ цилиндрическую поверхность, а остальныя двѣ стороны AD и BC этого прямоугольника—основанія цилиндра. Въ элементарной геометріи изучается только прямой цилиндръ, поэтому мы его будемъ называть, просто, цилиндромъ. Кривая часть поверхности цилиндра наз. *боковою поверхностью* цилиндра. Вся поверхность цилиндра, т. е. боковая поверхность вмѣстѣ съ площадями верхняго и нижняго основаній, наз. *полною поверхностью цилиндра*.

Чер. 315.

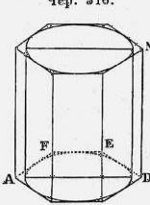
§ 207. Два цилиндра называются *подобными*, если отношеніе ихъ высотъ равно отношенію радіусовъ ихъ основаній. Изъ этого слѣдуетъ, что прямоугольники, образующіе такіе цилиндры, подобны между собою.

Измѣреніе поверхности цилиндра.

§ 208. Если около основанія цилиндра опишемъ многоугольникъ ABCDEF (чер. 316) и на этомъ многоугольникѣ, какъ на основаніи, построимъ прямую призму AN, высота которой равна высотѣ цилиндра, то такая призма наз. *описанною*.

Чер. 316.





Пусть H будетъ длина высоты, а P—перемѣнная длина периметра основанія описанной около даннаго цилиндра правильной прямой призмы; тогда мѣра боковой поверхности этой призмы Σ выразится такъ (§ 177 теор):

$$\Sigma = P \,.\, H.$$

Въ произведеніи P . H число H—постоянное число, а P—перемѣнное, которое измѣняется съ измѣненіемъ числа сторонъ описаннаго многоугольника и имѣетъ своимъ предѣломъ длину той окружности, около которой этотъ многоугольникъ описанъ (§ 126), т. е. длину окружности основанія цилиндра; означимъ этотъ предѣлъ длины периметра многоугольника описаннаго, т. е. длину окружности основанія цилиндра буквою L. Если P имѣетъ своимъ предѣломъ L, то произведеніе P. H, т. е. перемѣнная мѣра боковой поверхности описанной призмы имѣетъ своимъ предѣломъ постоянное произведеніе L . H (§ 131) и другаго предѣла, по теор. § 130, имѣть не можетъ.

Опредѣленіе *Мѣрою боковой поверхности цилиндра наз. тотъ единственный предѣлъ, къ которому приближается мѣра боковой поверхности описанной около этого цилиндра правильной призмы съ удвоеніемъ числа ея граней.* Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ

§ 209. **Теорема 1.** *Мѣра боковой поверхности цилиндра равняется длинѣ окружности его основанія, умноженной на высоту цилиндра.*

Если мѣру боковой поверхности цилиндра означимъ чрезъ S, длину окружности его основанія—чрезъ L, радіусъ ея—черезъ R, а высоту цилиндра—чрезъ H, то на основаніи опредѣленія мѣры этой поверхности (§ 208) имѣемъ, что $S = L \,.\, H$, но $L = 2\pi R$ (§ 135), слѣд. $S = 2\pi R \,.\, H$.

Слѣдствіе 1. Изъ формулы $S = 2\pi R \,.\, H$ видно, что *мѣра боковой поверхности цилиндра равняется мѣрѣ площади прямоугольника, длина основанія котораго равна длинѣ окружности основанія цилиндра, а высота—высотѣ цилиндра.*

Слѣдствіе 2. *Отношеніе боковыхъ поверхностей двухъ цилиндровъ равно произведенію отношенія радіусовъ ихъ основаній на отношеніе высотъ этихъ цилиндровъ.*

Слѣдствіе 3. *Если въ цилиндрѣ основаніе постоянно, а высота измѣняется, то боковая его поверхность пропорціональна высотѣ. Если же высота цилиндра постоянна, а основаніе измѣняется, то боковая его поверхность пропорціональна радіусу основанія цилиндра.*

Теорема 2. *Мѣра полной поверхности цилиндра равняется мѣрѣ боковой его поверхности, сложенной съ удвоенною мѣрою площади основанія цилиндра.* Такъ какъ мѣры

площадей верхняго и нижняго оснований равны, то мѣра полной поверхности цилиндра равна $2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H+R)$.

Слѣдствіе. Изъ послѣдней формулы видно что *мѣра полной поверхности цилиндра равна мѣрѣ площади прямоугольника, у котораго основаніе равно длинѣ окружности основанія, а высота равна суммѣ длины радіуса основанія и длины высоты цилиндра.*

§ 210. **Теорема**. *Отношеніе боковыхъ, а также полныхъ поверхностей двухъ подобныхъ цилиндровъ равно отношенію квадратовъ ихъ высотъ или отношенію квадратовъ радіусовъ ихъ основаній.*

Пусть S, S′, R и H означаютъ соотвѣтственно мѣру боковой поверхности, мѣру полной поверхности, радіусъ основанія и высоту одного цилиндра; s, s', r и h—тѣ же величины другаго цилиндра, подобнаго первому. Требуется доказать, что

$$\frac{S}{s} = \frac{S'}{s'} = \frac{H^2}{h^2} = \frac{R^2}{r^2}.$$

Доказ. На основаніи слѣд. 2 теоремы 1 § 209, имѣемъ

$$\frac{S}{s} = \frac{R}{r} \cdot \frac{H}{h},$$

но, по опредѣленію подобныхъ цилиндровъ (§ 207),

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h}, \quad \text{откуда}$$

$$\frac{S}{s} = \frac{H^2}{h^2} = \frac{R^2}{r^2}.$$

Изъ теор. 2 § 209 заключаемъ, что $\frac{S'}{s'} = \frac{R(H+R)}{r(h+r)}$,

а изъ пропорціи $\frac{R}{r} = \frac{H}{h}$ имѣемъ $\frac{R+H}{r+h} = \frac{R}{r} = \frac{H}{h}$,

откуда $\frac{S'}{s'} = \frac{H^2}{h^2} = \frac{R^2}{r^2}.$

Измѣреніе объема цилиндра.

§ 211. Пусть H будетъ высота, а Q— перемѣнная мѣра площади основанія описанной около цилиндра правильной прямой призмы; тогда мѣра объема этой призмы U (§ 183, теор. 2) выразится такъ

$$U = Q \cdot H.$$

Въ произведеніи Q . H число H—постоянное, а число Q—перемѣнное, которое измѣняется съ удвоеніемъ числа сторонъ многоугольника основанія призмы и имѣетъ своимъ предѣломъ площадь круга K (§ 132). Если Q имѣетъ своимъ предѣломъ K, то произведеніе Q . H, т. е. перемѣнная мѣра объема описанной призмы, имѣетъ своимъ предѣломъ K . H (§ 131) и, по теор. § 130, другаго предѣла имѣть не можетъ.

Опредѣленіе. *Мѣрою объема цилиндра наз. тотъ единственный предѣлъ, къ которому приближается мѣра объема описанной призмы съ удвоеніемъ числа ея граней.*

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ

§ 212. **Теорема**. *Мѣра объема цилиндра равна произведенію мѣры площади его основанія на высоту цилиндра.*

Если означимъ мѣру площади основанія цилиндра чрезъ K, радіусъ этого основанія—черезъ R, и высоту цилиндра—чрезъ H, то мѣра объема V цилиндра, по опредѣленію этой мѣры (§ 211), выразится такъ:

$$V = K \cdot H,$$

но $K = \pi R^2$ (§ 137), слѣд. $V = \pi R^2 \cdot H$.

Слѣдствіе 1. *Отношеніе объемовъ двухъ цилиндровъ равно произведенію отношенія площадей ихъ основаній на отношеніе высотъ.*

Слѣдствіе 2. *Если въ цилиндрѣ основаніе постоянно, а высота измѣняется, то объемъ этого цилиндра пропорціоналенъ высотѣ. Если же высота цилиндра постоянна, а основаніе его измѣняется, то объемъ такого цилиндра пропорціоналенъ площади основанія.*

§ 213. **Теорема**. *Отношеніе объемовъ двухъ подобныхъ цилиндровъ равно отношенію кубовъ ихъ высотъ или отношенію кубовъ радіусовъ ихъ основаній.*

Пусть V, R и H означаютъ соотвѣтственно мѣру объема, радіусъ основанія и высоту одного цилиндра; v, r и h—тѣ же величины другаго цилиндра, подобнаго первому. Требуется доказать, что

$$\frac{V}{v} = \frac{H^3}{h^3} = \frac{R^3}{r^3}.$$

Доказ. На основаніи 1-го слѣд. § 212 имѣемъ

$$\frac{V}{v} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} \cdot \frac{H}{h} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{H}{h};$$

но, по опредѣленію подобныхъ цилиндровъ (§ 207),

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h},$$

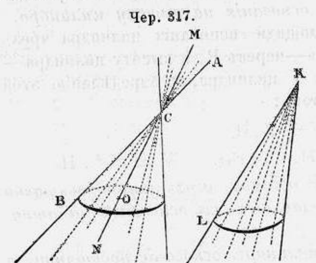
слѣдов.

$$\frac{V}{v} = \frac{H^3}{h^3} = \frac{R^3}{r^3}.$$

Виды и свойства конуса.

§ 214. Если прямая AB (чер. 317), имѣющая одну неподвижную точку C, движется и при этомъ движеніи постоянно скользитъ по нѣкоторой кривой линіи, въ плоскости которой не лежитъ прямая, напр. по окружности O, то эта прямая AB образуетъ поверхность, называемую *коническою*. Въ этомъ случаѣ прямая AB наз. *образующею*, а окружность O—*управляющею* линіей конической поверхности. Прямая MN, проходящая чрезъ неподвижную точку C образующей AB и центръ O управляющаго круга, наз. *осью* конической поверхности.

Чер. 317.



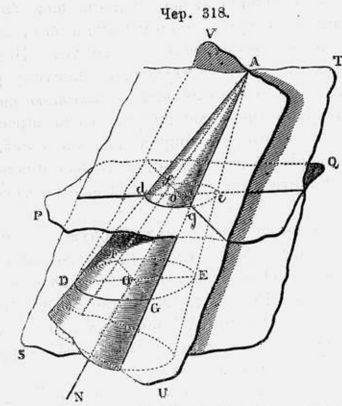
Коническая поверхность, образованная движеніемъ безконечной прямой AB, состоитъ изъ двухъ частей, которыя имѣютъ общую точку въ неподвижной точкѣ C образующей AB; эти части конической поверхности наз. *полостями* конической поверхности. Такая коническая поверхность наз. *двухполостною* коническою поверхностью. Если же образующая KL ограничена съ одного конца K и этотъ конецъ K остается неподвиженъ при движеніи образующей KL, то получается коническая поверхность *съ одною полостью*.

Въ элементарной геометріи изучается только однополостная коническая поверхность, управляющая линія которой есть окружность.

§ 215. **Теорема**. *Всякое сѣченіе конической поверхности плоскостью, параллельною управляющему кругу, есть окружность.*

Плоскость PQ (чер. 318), проведенная параллельно управляющему кругу O конической поверхности, пересѣкаетъ эту поверхность по линіи $dgef$, а ось ея — въ точкѣ O; требуется доказать, что эта линія есть окружность.

Чер. 318.



Доказ. Чрезъ ось AN конической поверхности проведемъ двѣ плоскости, изъ которыхъ одна ST пересѣчетъ коническую поверхность по образующимъ AE и AD, а другая UV по образующимъ AF и AG. Управляющій кругъ O и площадь параллельнаго ему сѣченія $dgef$ пересѣкутся съ первою плоскостью по прямымъ DE и de, а со второю — по прямымъ GF и gf. Такъ какъ двѣ параллельныя плоскости пересѣкаются третьею плоскостью по прямымъ параллельнымъ (§ 163, слѣд. I), то DE || de и GF || gf. Изъ параллельности этихъ линій по § 87 заключаемъ, что

$$\frac{oe}{OE} = \frac{Ao}{AO} \quad \text{и} \quad \frac{of}{OF} = \frac{Ao}{AO}, \text{ откуда (акс. 1)}$$

$$\frac{oe}{OE} = \frac{of}{OF};$$

но OE=OF, слѣд. и $oe=of$, т. е. всѣ точки линіи $dfeg$ равно отстоятъ отъ точки o, а потому эта линія сѣченія $dfeg$ есть окружность, центръ которой въ точкѣ o, на оси конуса.

§ 216. Тѣло, ограниченное коническою поверхностью и управляющимъ кругомъ, наз. *конусомъ* (conus, κῶνος). Кривая поверхность, ограничивающая конусъ, наз. *боковою* поверхностью конуса, а кругъ, составляющій остальную часть поверхности конуса, — *основаніемъ* конуса. Неподвижная точка A образующей назыв. *вершиною* конуса; разстояніе вершины конуса отъ основанія его — *высотою* конуса; ось конической поверхности—*осью* конуса. Если высота конуса совпадаетъ съ осью его, то конусъ наз. *прямымъ*. Въ элементарной геометріи разсматривается только прямой конусъ, поэтому для краткости выраженія будемъ называть его, просто конусомъ.

Образованіе прямаго конуса можно объяснить иначе. Въ самомъ дѣлѣ, если прямоугольный △ ABC (чер. 319) вращать около одного изъ его катетовъ BC, который остается неподвижнымъ, то гипотенуза AB образуетъ коническую поверхность, а другой катетъ AC—кругъ основанія конуса.

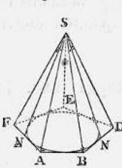
Чер. 319.

§ 217. Два конуса называются *подобными*, если отношеніе ихъ высотъ равно отношенію радіусовъ ихъ основаній. Изъ этого слѣдуетъ, что прямоугольные треугольники, образующіе такіе конусы, подобны между собою.

Измѣреніе поверхности конуса.

§ 218. Если около основанія конуса опишемъ многоугольникъ ABDEF (чер. 320) и на этомъ многоугольникѣ, какъ на основаніи, построимъ пирамиду SABDEF, вершина которой совпадаетъ съ вершиною S конуса, то пирамида SABDEF наз. *описанною*. Апоѳема SN правильной описанной пирамиды совпадаетъ съ образующей конуса, потому что апоѳема проходитъ чрезъ вершину S конуса и чрезъ средину N стороны FA основанія описанной пирамиды; но эта точка N есть точка касанія стороны FA съ окружностью основанія конуса.

Чер. 320.



Пусть M будетъ длина апоѳемы, а P—перемѣнная длина

периметра основанія описанной около даннаго конуса правильной прямой пирамиды, тогда мѣра боковой поверхности этой пирамиды Σ выразится (§ 190) такъ:

$$\Sigma = P \cdot \frac{M}{2}.$$

Въ произведеніи $P \cdot \frac{M}{2}$ множитель $\frac{M}{2}$—постоянный, а множитель P—перемѣнный, который измѣняется съ измѣненіемъ числа сторонъ описаннаго правильнаго многоугольника и имѣетъ своимъ предѣломъ длину L окружности (§ 126). Если же P имѣетъ своимъ предѣломъ L, то произведеніе $P \cdot \frac{M}{2}$, т. е. перемѣнная мѣра боковой поверхности описанной пирамиды, имѣетъ своимъ предѣломъ $L \cdot \frac{M}{2}$ (§ 131) и другаго предѣла, по теор. § 130, имѣть не можетъ.

Опредѣленіе. *Мѣрою боковой поверхности конуса наз. тотъ единственный предѣлъ, къ которому приближается мѣра боковой поверхности пирамиды, описанной около этого конуса, съ удвоеніемъ числа ея граней.* Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ

§ 219. **Теорема 1.** *Мѣра боковой поверхности конуса равна длинѣ окружности основанія его, умноженной на половину образующей конуса.*

Означая чрезъ S мѣру боковой поверхности конуса, чрезъ M—длину образующей, чрезъ L — длину окружности основанія конуса и чрезъ R—радіусъ этого основанія, по предыдущему § будемъ имѣть:

$$S = L \cdot \frac{M}{2},$$

но $L = 2\pi R$ (§ 135); слѣд. $S = 2\pi R \cdot \frac{M}{2}$.

Слѣдствіе 1. Изъ послѣдней формулы видно, что *мѣра боковой поверхности конуса равна мѣрѣ площади треугольника, котораго основаніе равно длинѣ окружности основанія, а высота равна образующей конуса.*

Слѣдствіе 2. *Отношеніе боковыхъ поверхностей двухъ конусовъ равно произведенію отношенія радіусовъ ихъ основаній на отношеніе образующихъ.*

Слѣдствіе 3. *Если въ конусъ основаніе постоянно, а образующая измѣняется, то боковая поверхность его пропорціональна образующей. Если же образующая конуса постоянна, а основаніе измѣняется, то боковая его поверхность пропорціональна радіусу основанія конуса.*

Теорема 2. *Мѣра полной поверхности конуса равняется мѣрѣ площади кривой (т. е. боковой) его поверхности, сложенной съ мѣрою площади основанія его*, т. е. равняется

$$\pi RM+\pi R^2=\pi R(M+R).$$

Слѣдствіе. Изъ формулы $\pi R(M+R)=2\pi R\,\frac{(M+R)}{2}$, заключаемъ, что *мѣра полной поверхности конуса равна мѣрѣ площади треугольника, котораго основаніе равно длинѣ окружности основанія конуса, а высота—суммѣ длинъ радіуса основанія и образующей конуса.*

§ 220. **Теорема**. *Отношеніе боковыхъ, а также и полныхъ поверхностей двухъ подобныхъ конусовъ равно отношенію квадратовъ высотъ или отношенію квадратовъ радіусовъ ихъ основаній*

Пусть S, S′, R, H и M означаютъ соотвѣтственно мѣру боковой поверхности, мѣру полной поверхности, радіусъ основанія, высоту и образующую одного конуса; s, s', r, h и m—тѣже величины другаго конуса, подобнаго первому. Требуется доказать, что

$$\frac{S}{s}=\frac{S'}{s'}=\frac{H^2}{h^2}=\frac{R^2}{r^2}.$$

Доказ. На основаніи слѣд. 2 теор. 1 § 219 имѣемъ:

$$\frac{S}{s}=\frac{R}{r}\cdot\frac{M}{m}.$$

Но по опредѣленію подобныхъ конусовъ треугольники, образующіе эти конусы, подобны (§ 217), а потому

$$\frac{R}{r}=\frac{M}{m}=\frac{H}{h},$$

откуда $$\frac{S}{s}=\frac{H^2}{h^2}=\frac{R^2}{r^2}.$$

Изъ теоремы 2 § 219 имѣемъ, что

$$\frac{S'}{s'}=\frac{R(M+R)}{r(m+r)},$$

а изъ пропорцій $\frac{R}{r}=\frac{M}{m}=\frac{H}{h}$ имѣемъ, что

$$\frac{M+R}{m+r}=\frac{R}{r}=\frac{H}{h},$$

откуда $$\frac{S'}{s'}=\frac{H^2}{h^2}=\frac{R^2}{r^2}.$$

Измѣреніе объема конуса.

§ 221. Пусть H будетъ высота, а Q — перемѣнная мѣра площади основанія описанной пирамиды; тогда мѣра объема этой пирамиды U выразится такъ: $U=Q\cdot\frac{H}{3}\cdot$ (§ 194, теор. 2).

Въ произведеніи $Q\cdot\frac{H}{3}$ число $\frac{H}{3}$ — постоянное, а число Q — перемѣнное, которое измѣняется съ измѣненіемъ числа сторонъ n правильнаго многоугольника, описаннаго около основанія конуса, и имѣетъ своимъ предѣломъ мѣру площади круга K этого основанія (§ 132). Если Q имѣетъ своимъ предѣломъ K, то произведеніе $Q\cdot\frac{H}{3}$, т. е. перемѣнная мѣра объема описанной пирамиды, имѣетъ своимъ предѣломъ $K.\frac{H}{3}$ (§ 131) и другаго предѣла, по теор. § 130, имѣть не можетъ.

Опредѣленіе. *Мѣрою объема конуса наз. тотъ единственный предѣлъ, къ которому приближается мѣра объема пирамиды, описанной около конуса, съ удвоеніемъ числа ея граней.* Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ

§ 222. **Теорема**. *Мѣра объема конуса равна мѣрѣ площади основанія его, умноженной на треть высоты конуса.*

Означая чрезъ V мѣру объема конуса, чрезъ H—высоту его, а чрезъ R—радіусъ и чрезъ K — мѣру площади основанія конуса, будемъ по предыдущему § имѣть:

$$V=K\cdot\frac{H}{3},$$

но $K=\pi R^2$ (§ 137), слѣд. $V=\pi R^2\cdot\frac{H}{3}$.

Слѣдствіе 1. *Отношеніе объемовъ двухъ конусовъ равно*

произведенію отношенія площадей ихъ основаній на отношеніе высотъ.

Слѣдствіе 2. *Если въ конусѣ основаніе постоянно, а высота измѣняется, то объемъ этого конуса пропорціоналенъ высотѣ. Если же высота конуса постоянна, а основаніе его измѣняется, то объемъ такого конуса пропорціоналенъ площади основанія.*

§ 223. **Теорема.** *Отношеніе объемовъ двухъ подобныхъ конусовъ равно отношенію кубовъ ихъ высотъ или отношенію кубовъ радіусовъ ихъ основаній.*

Пусть V, R и H означаютъ соотвѣтственно мѣру объема, радіусъ основанія и высоту одного конуса; v, r и h — тѣ же величины другаго конуса, подобнаго первому. Требуется доказать, что

$$\frac{V}{v} = \frac{H^3}{h^3} = \frac{R^3}{r^3}.$$

Доказ. На основаніи слѣдствія 1 § 222 имѣемъ:

$$\frac{V}{v} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{H}{h}.$$

Но, по опредѣленію подобныхъ конусовъ (§ 217),

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h};$$

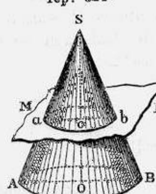
слѣд.

$$\frac{V}{v} = \frac{H^3}{h^3} = \frac{R^3}{r^3}.$$

Конусъ, усѣченный плоскостью параллельно основанію.

§ 224. Если разсѣчемъ конусъ ASB (чер. 321) плоскостью MN параллельно основанію, то по § 215 получимъ въ сѣченіи окружность ab. Часть конуса BAab, заключенная между основаніемъ AB и кругомъ сѣченія ab, наз. *усѣченнымъ конусомъ.* Круги AB и ab называются *основаніями* усѣченнаго конуса, прямая Aa — *образующею*, прямая Oo, перпендикулярная къ обоимъ основаніямъ и соединяющая ихъ центры — *осью* усѣченнаго конуса.

Чер. 321.

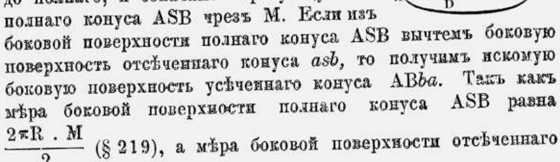


§ 225. **Теорема 1.** *Мѣра боковой поверхности конуса, усѣченнаго параллельно основанію, равняется полсуммѣ окружностей основаній, умноженной на образующую его.*

Данъ усѣченный конусъ ABba (чер. 322). Радіусъ нижняго основанія его AO означимъ чрезъ R, радіусъ верхняго основанія ao — чрезъ r; образующую Aa — чрезъ m. Требуется доказать, что мѣра боковой поверхности усѣченнаго конуса

$$S = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \cdot m.$$

Чер. 322.



Доказ. Достроимъ усѣченный конусъ до полнаго, и означимъ образующую AS полнаго конуса ASB чрезъ M. Если изъ боковой поверхности полнаго конуса ASB вычтемъ боковую поверхность отсѣченнаго конуса asb, то получимъ искомую боковую поверхность усѣченнаго конуса ABba. Такъ какъ мѣра боковой поверхности полнаго конуса ASB равна $\frac{2\pi R \,.\, M}{2}$ (§ 219), а мѣра боковой поверхности отсѣченнаго конуса asb равна $\frac{2\pi r\,(M - m)}{2}$, то искомая мѣра поверхности, по вышесказанному,

$$S = \frac{2\pi RM}{2} - \frac{2\pi r\,(M - m)}{2} \text{ или}$$

$$S = \frac{2\pi\,(RM - rM + rm)}{2} = \frac{2\pi\,[M\,(R - r) + mr]}{2}.$$

Если чрезъ высоту конуса проведемъ плоскость, которая пересѣчетъ нижнее основаніе по прямой AB, а кругъ сѣченія — по прямой ab, и изъ точки a опустимъ перпендикуляръ aD на AB, то получимъ подобные треугольники AaD и ASO, изъ которыхъ имѣемъ, что

$$\frac{AD}{Aa} = \frac{AO}{AS} \quad \text{или} \quad \frac{R - r}{m} = \frac{R}{M}, \quad \text{откуда}$$

$$(R - r)\ M = mR.$$

Вставя въ выраженіе S вмѣсто $(R - r)$ M равное ему mR, получимъ:

$$S = \frac{2\pi\,(mR + mr)}{2} = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \cdot m,$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1. Если чрезъ средину высоты усѣченнаго конуса проведемъ плоскость, параллельную его основаніямъ, то въ сѣченіи получимъ окружность Tt, равную полсуммѣ окружностей основаній усѣченнаго конуса. Въ самомъ дѣлѣ, означивъ радіусъ TO' чрезъ r', будемъ имѣть

изъ $\triangle AOS \infty \triangle TO'S$ $\qquad \frac{R}{r'} = \frac{SO}{SO'}$

изъ $\triangle TO'S \infty \triangle aoS$ $\qquad \frac{r}{r'} = \frac{So}{SO'}$.

Складывая эти равенства, получимъ:

$$\frac{R+r}{r'} = \frac{SO+So}{SO'},$$

но $SO=SO'+OO'$ и $So=SO'-oO'$, поэтому

$$\frac{R+r}{r'} = \frac{SO'+OO'+SO'-oO'}{SO'}, \text{ откуда}$$

$$\frac{R+r}{r'}=2 \quad \text{или} \quad \frac{R+r}{2}=r'.$$

Умноживъ послѣднее равенство на $2\pi m$, получимъ, что

$$\frac{2\pi R+2\pi r}{2}.m=2\pi r'm. \quad \text{или} \quad S=2\pi r'.m$$

т. е. *мѣра боковой поверх. усѣчен. конуса равна произведенію длины окружности средняго сѣченія на образующую.*

Слѣдствіе 2. Легко видѣть, что *мѣра боковой поверхности усѣченнаго конуса равняется мѣрѣ площади трапеціи, параллельныя стороны которой равны длинамъ окружностей основаній, а высота—образующей усѣченнаго конуса.*

Теорема 2. *Мѣра полной поверхности усѣченнаго конуса равняется мѣрѣ боковой поверхности, сложенной съ мѣрами площадей основаній*, т. е. равна $m\frac{(2\pi R+2\pi r)}{2}+\pi R^2+\pi r^2=$

$=\pi m R+\pi m r+\pi R^2+\pi r^2=\pi[R(m+R)+r(m+r)]$.

§ 226. **Теорема.** *Мѣра объема усѣченнаго конуса равна суммѣ мѣръ объемовъ трехъ конусовъ, имѣющихъ высоту, общую съ усѣченнымъ, а основанія: одинъ—нижнее, другой—верхнее, а третій—среднее пропорціональное между верхнимъ и нижнимъ основаніями усѣченнаго конуса.*

Пусть данъ усѣченный конусъ $ABba$ (чер. 323), высоту котораго Oo означимъ чрезъ h, а радіусы AO и ao основаній означимъ соотвѣтственно чрезъ R и r. Требуется доказать, что мѣра объема V этого усѣченнаго конуса равна $\pi R^2.\frac{h}{3}+\pi r^2.\frac{h}{3}+\pi Rr.\frac{h}{3}$.

Чер. 323.

Доказ. Достроимъ усѣченный конусъ до полнаго SAB и означимъ высоту SO этого полнаго конуса чрезъ H, тогда искомая мѣра объема V усѣченнаго конуса $ABba$ будетъ равна разности мѣръ объемовъ конусовъ ASB и asb, т. е.

$$V=\frac{\pi AO^2.SO}{3}-\frac{\pi ao^2.So}{3}=\frac{\pi R^2H}{3}-\frac{\pi r^2(H-h)}{3}=$$

$$=\frac{\pi}{3}(R^2H-r^2H+r^2h)=\frac{\pi}{3}[H(R^2-r^2)+r^2h].$$

Если проведемъ плоскость ASB чрезъ высоту конуса so, и опустимъ изъ точки a перпендикуляръ aD на основаніе AB треугольника ASB, то получимъ $\triangle AaD \infty \triangle ASO$ (§ 93, теор. 4, слѣд. 2), откуда будемъ имѣть, что

$$\frac{AD}{aD}=\frac{AO}{SO}, \quad \text{т. е.}$$

$$\frac{R-r}{h}=\frac{R}{H}.$$

Умноживъ обѣ части равенства на $R+r$, будемъ имѣть:

$$\frac{R^2-r^2}{h}=\frac{R(R+r)}{H} \text{ или } H(R^2-r^2)=hR(R+r).$$

Вставляя $hR(R+r)$ вмѣсто $H(R^2-r^2)$ въ выраженіе V, найдемъ, что

$$V=\frac{\pi}{3}(hR(R+r)+r^2h)=\pi R^2\frac{h}{3}+\pi r^2\frac{h}{3}+\pi Rr\frac{h}{3}.$$

Шаръ и его сѣченія.

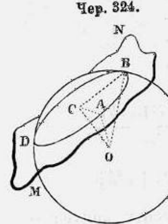
§ 227. Полукругъ, вращаясь около своего діаметра, который остается неподвижнымъ, образуетъ тѣло, называемое *шаромъ* или *сферою* (σφαῖρα). При этомъ вращеніи полуокружность описываетъ поверхность шара. Центръ полукруга наз.

центромъ шара. Очевидно, что всѣ точки поверхности шара равно отстоятъ отъ центра его. Разстояніе какой нибудь точки шара отъ центра его наз. *радіусомъ* шара. Прямая, соединяющая двѣ точки шара и проходящая чрезъ центръ его, назыв. *діаметромъ* шара.

§ 228. **Теорема.** *Всякое сѣченіе поверхности шара плоскостью есть окружность.*

Данъ шаръ O (чер. 324) и дана плоскость MN, которая разсѣкаетъ поверхность шара по нѣкоторой линіи DAB; требуется доказать, что эта линія есть окружность.

Чер. 324.



Доказ. Изъ центра O шара опустимъ на плоскость сѣченія перпендикуляръ OC и соединимъ центръ O шара и основаніе C перпендикуляра съ какими нибудь двумя точками A и B линіи DAB прямыми OA, OB, CA и CB. Треугольники ACO и BCO равны, потому что имѣютъ общій катетъ CO и равныя гипотенузы AO и BO, какъ радіусы шара (§ 53, теор. 3, слѣд.), откуда AC=BC. Слѣд. всѣ точки линіи DAB находятся въ равномъ разстояніи отъ одной точки C, лежащей на плоскости MN, а потому кривая сѣченія есть окружность (§ 21).

Слѣдствія. Если означимъ разстояніе OC плоскости сѣченія отъ центра шара чрезъ K, радіусъ шара OB чрезъ R и радіусъ круга сѣченія CB чрезъ r, то изъ прямоугольнаго $\triangle$OBC будемъ имѣть: $r=\sqrt{R^2-K^2}$ (§ 89, слѣд. 2), откуда слѣдуетъ, что

1) *Кругъ, происшедшій отъ сѣченія шара плоскостью, увеличивается по мѣрѣ приближенія его къ центру шара,* потому что K уменьшается.

2) Если сѣченіе проходитъ чрезъ центръ шара, то K=O и r=R, т. е. центръ такого круга сѣченія совпадаетъ съ центромъ шара и радіусъ круга сѣченія равенъ радіусу шара. Такое сѣченіе болѣе всякаго другаго и потому *кругъ, образованный сѣченіемъ, проходящимъ чрезъ центръ, наз. большимъ, а кругъ, образованный сѣченіемъ, не проходящимъ чрезъ центръ, — малымъ кругомъ.* Очевидно, что *всѣ большіе круги того же шара равны между собою.*

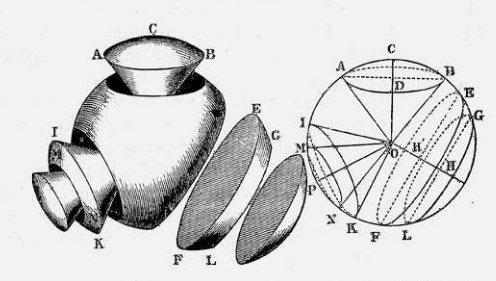
3) *Большіе круги взаимно дѣлятся пополамъ,* потому

что прямая ихъ пересѣченія проходитъ чрезъ центръ шара и слѣд. составляетъ діаметръ, общій обоимъ кругамъ.

4) *Всякій большой кругъ дѣлитъ шаръ и поверхность его на двѣ равныя части,* потому что эти части при наложеніи совмѣщаются.

§ 229. Если разсѣчемъ шаръ плоскостью, то онъ раздѣлится на двѣ части, изъ которыхъ каждая наз. *шаровымъ отрѣзкомъ или шаровымъ сегментомъ.* Слѣд. шаровымъ отрѣзкомъ наз. часть шара, отсѣченная плоскостью, напр. ACBD (чер. 325) есть шаровой отрѣзокъ. Часть поверхности шара ACB, ограничивающая шаровой отрѣзокъ, наз. *боковою поверхностью* его. Кругъ сѣченія AB наз. *основаніемъ шароваго отрѣзка,* а часть перпендикуляра CD, возставленнаго къ кругу основанія изъ центра его до пересѣченія съ поверхностью отрѣзка, — *высотою* его.

Чер. 325.



§ 230. Часть шара EGLF, ограниченная двумя параллельными кругами сѣченія, наз. *шаровымъ слоемъ,* а часть поверхности шара, ограничивающая шаровой слой, — *шаровымъ поясомъ* или *зоною* (ζώνη). *Высотою слоя* называется разстояніе HH′ между параллельными сѣченіями, которыя называются *основаніями* шароваго пояса.

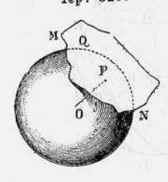
§ 231. Если круговой вырѣзокъ ACO будетъ вращаться около радіуса OC, проходящаго чрезъ конецъ C дуги AC этого вырѣзка, то образуется *шаровой вырѣзокъ или шаровой секторъ.* Этотъ вырѣзокъ отдѣляется отъ всего шара коническою поверхностью, образованной прямою OA; вершина этой конической поверхности въ центрѣ O шара, а ось OC

совпадаетъ съ осью вращенія. Описанная при этомъ дугою AC поверхность сегмента наз. *основаніемъ сектора.*

Шаровой вырѣзокъ можетъ имѣть другой видъ, именно: можетъ образоваться вращеніемъ круговаго вырѣзка IMO около радіуса OP, не проходящаго чрезъ точку дуги IM, но при этомъ вращеніи уголъ IOP долженъ сохранять одну и туже величину. Этотъ вырѣзокъ читается пятью буквами IMONK и отдѣляется отъ всего шара двумя коническими поверхностями, образованными прямыми OM и OI; вершины этихъ коническихъ поверхностей въ центрѣ O шара, а оси совпадаютъ съ осью вращенія OP. Описанный при этомъ дугою IM поясъ IMNK наз. *основаніемъ сектора.*

§ 232. Плоскость MN (чер. 326), имѣющая только одну общую точку P съ поверхностью шара O, назыв. *касательною плоскостью.*

Чер. 326.



Теорема 1. *Касательная плоскость перпендикулярна къ радіусу шара, проведенному въ точку прикосновенія.*

Дана плоскость MN касательная въ точкѣ P къ шару O и проведенъ радіусъ OP въ эту точку; требуется доказать, что радіусъ OP перпендикуляренъ къ плоскости MN.

Доказ. Прямая, соединяющая центръ шара O со всякою другою точкою плоскости MN, длиннѣе OP, потому что всякая другая точка Q плоскости MN лежитъ внѣ шара, т. е. далѣе отъ центра, нежели точка P, а потому прямая OP есть кратчайшее разстояніе отъ центра до касательной плоскости MN, слѣдов. OP есть перпендикуляръ къ этой плоскости (§ 148, теор. 1 и § 150).

Теорема 2, *обр. Плоскость, проведенная черезъ конецъ радіуса перпендикулярно къ этому родіусу, есть плоскость касательная къ шару.*

Доказ. По условію OP есть перпендикуляръ къ плоскости MN изъ центра O шара, а перпендикуляръ короче наклонной (§ 150); слѣд. разстояніе какой нибудь точки Q плоскости отъ центра болѣе перпендикуляра OP, т. е. болѣе радіуса, а потому всѣ точки плоскости MN, кромѣ точки P не лежатъ на поверхности шара, а внѣ ея.

Измѣреніе поверхности шара и его частей.

§ 233. Если вообразимъ себѣ на плоскости прямую, около которой эта плоскость вращается, причемъ прямая остается неподвижною, то всякакая линія, лежащая на этой плоскости опишетъ нѣкоторую поверхность, которая называется *поверхностью вращенія*; неподвижная прямая—*осью вращенія*; перемѣщающаяся линія—*образующею* поверхности.

Теорема. *Мѣра поверхности, образованной движеніемъ конечной прямой, не перпендикулярной къ оси вращенія, равна проложенію этой прямой на ось, умноженному на длину окружности, радіусъ которой есть длина перпендикуляра, возставленнаго къ сказанной прямой изъ средины ея до пересѣченія съ осью вращенія.*

Пусть будетъ прямая AB (чер. 327) — ось вращенія; конечная прямая CD (не перпендикулярная и не параллельная AB) образующая поверхности CDFE, описанной вращеніемъ прямой CD около оси. Требуется доказать, что мѣра этой поверхности S равна $2\pi ON \times GK$, гдѣ ON есть перпендикуляръ къ прямой CD изъ ея средины N до встрѣчи съ осью въ точкѣ O, GK — проложеніе прямой CD на ось вращенія AB.

Чер. 327.

Доказ. Такъ какъ прямыя AB и CD лежатъ въ одной плоскости, то продолженная прямая CD пересѣчетъ прямую AB и при вращеніи образуетъ конусъ, поэтому прямая CD при вращеніи образуетъ усѣченный конусъ, слѣд. мѣра поверхности, образованной прямою CD, будетъ равна

$$\frac{2\pi KD + 2\pi GC}{2} = 2\pi MN \,.\, CD \quad (\S\ 225,\ \text{теор. } 1).$$

Проведя изъ точки G прямую GP, параллельную прямой CD, получимъ подобные треугольники KGP и MNO, потому что всѣ ихъ стороны соотвѣтственно перпендикулярны (§ 93, теор. 4, слѣд. 1), и поэтому имѣемъ:

$$\frac{MN}{ON} = \frac{GK}{GP} \qquad \text{или} \qquad MN \,.\, GP = ON \,.\, GK,$$

но GP = CD (§ 58, теор. 1) и слѣд.

$$MN \cdot CD = ON \cdot GK,$$

или, умноживъ обѣ части равенства на 2π, получимъ

$$2\pi MN \cdot CD = 2\pi ON \cdot GK,$$

т. е. мѣра поверхности $S = 2\pi ON \cdot GK$.

Замѣчаніе. Если образующая прямая параллельна оси вращенія, то эта теорема очевидна, потому что тогда поверхность вращенія есть поверхность цилиндрическая.

§ 234. **Теорема**. *Если ось проходитъ черезъ противуположныя вершины и черезъ центръ описаннаго правильнаго полумногоугольника, то мѣра поверхности тѣла, полученнаго отъ вращенія этого полумногоугольника, равна окружности большаго круга вписаннаго шара, умноженной на ось вращенія.*

Доказ. Возьмемъ описанный около даннаго круга правильный многоугольникъ съ четнымъ числомъ сторонъ, напр. правильный десятиугольникъ. Заставимъ половину этого многоугольника вмѣстѣ съ половиною круга вращаться около прямой AF (чер. 328), проходящей черезъ центръ O и противуположныя вершины многоугольника, какъ около оси, тогда полукругъ образуетъ шаръ, а описанный полумногоугольникъ — описанное около этого шара тѣло вращенія. По предыдущему § легко вычислить мѣру поверхности этого тѣла вращенія.

Чер. 328.

Въ самомъ дѣлѣ, означивъ радіусъ даннаго круга черезъ R, и черезъ Δ длину оси AF, получимъ:

мѣра поверхности описанной прямою $AB = 2\pi R \cdot AG$

„ „ „ „ $BC = 2\pi R \cdot GH$

„ „ „ „ $CD = 2\pi R \cdot HI$

„ „ „ „ $DE = 2\pi R \cdot IK$

„ „ „ „ $EF = 2\pi R \cdot KF$

Слѣд. мѣра поверхности описаннаго тѣла вращенія равна

$$2\pi R\,(AG + GH + HI + IK + KF) = 2\pi R \cdot AF = 2\pi R \cdot \Delta.$$

§ 235. Въ произведеніи $2\pi R \cdot \Delta$, найденномъ въ предыдущемъ §, множитель $2\pi R$ есть постоянное число, а Δ—перемѣнное, которое уменьшается съ увеличиваніемъ числа

сторонъ описаннаго многоугольника и имѣетъ своимъ предѣломъ діаметръ шара 2R. Послѣднее можно доказать такъ: изъ прямоугольнаго △ AON имѣемъ, что $AN^2 = AO^2 - ON^2$ или, означивъ сторону описаннаго правильнаго многоугольника AB чрезъ b_{2n}, получимъ:

$$\left(\frac{b_{2n}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 - R^2 \quad \text{или} \quad b_{2n}^2 = \Delta^2 - 4R^2.$$

Но, съ удвоеніемъ числа сторонъ, сторона описаннаго многоугольника уменьшается и можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою, слѣд. и b_{2n}^2 еще быстрѣе уменьшается и скорѣе можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою, а потому и разность $\Delta^2 - 4R^2$ также уменьшается и можетъ быть сдѣлана менѣе произвольно малаго числа, т. е. Δ приближается къ 2R, притомъ такъ, что разность между Δ и 2R можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою. Так. образ. діаметръ шара есть предѣлъ для перемѣнной длины оси сказаннаго тѣла вращенія. Итакъ, если Δ имѣетъ своимъ предѣломъ 2R, то $2\pi R \cdot \Delta$, т. е. перемѣнная мѣра поверхности описаннаго тѣла вращенія имѣетъ, по теоремѣ § 131, своимъ предѣломъ $2\pi R \cdot 2R$ и, по теоремѣ § 130, другаго предѣла имѣть не можетъ.

Опредѣленіе. *Мѣрою поверхности шара называется тотъ единственный предѣлъ, къ которому приближается мѣра поверхности указаннаго тѣла вращенія съ удвоеніемъ числа сторонъ многоугольника, образовавшаго это тѣло вращенія.*

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ

§ 236. **Теорема**. *Мѣра поверхности шара равна длинѣ окружности большаго круга, умноженной на діаметръ.* То есть, означивъ мѣру поверхности шара буквою S и черезъ R—радіусъ его, имѣемъ

$$S = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

Слѣдствіе. *Мѣра поверхности шара равна учетверенной мѣрѣ площади большаго круга шара.*

Такъ какъ $S = \pi(2R)^2$, то *мѣра поверхности шара равна площади большаго круга, радіусъ котораго равенъ діаметру шара.*

Такъ какъ $R = \frac{D}{2}$, гдѣ D есть діаметръ шара, то

$$S = \pi D^2.$$

§ 237. **Теорема**. *Отношеніе поверхностей двухъ шаровъ равно отношенію квадратовъ ихъ радіусовъ.*

Такъ какъ всѣ шары подобны между собою, то означивъ чрезъ S и S′ мѣры поверхностей двухъ шаровъ, которыхъ радіусы R и R′, будемъ имѣть (§ 236):

$$\frac{S}{S'} = \frac{4\pi R^2}{4\pi R'^2} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

§ 238. Изъ опредѣленія мѣры поверхности шара (§ 235) слѣдуетъ, что *мѣра поверхности шароваго пояса*, какъ части поверхности шара, *есть предѣлъ, къ которому приближается мѣра части поверхности тѣла вращенія, заключенной между параллельными плоскостями, ограничивающими поясъ*, въ то время, какъ мѣра всей поверхности тѣла вращенія приближается къ мѣрѣ поверхности всего шара.

Точно также *мѣра боковой поверхности шароваго отрѣзка* (сегмента) какъ части поверхности шара *есть предѣлъ, къ которому приближается мѣра части поверхности тѣла вращенія, отсѣченной плоскостью основанія отрѣзка*, въ то время, какъ мѣра всей поверхности тѣла вращенія приближается къ мѣрѣ поверхности всего шара. Изъ этихъ опредѣленій вытекаютъ слѣдующія двѣ теоремы:

§ 239. **Теорема 1.** *Мѣра поверхности шароваго пояса равна длинѣ окружности большаго круга шара, умноженной на высоту пояса.*

То есть, означая черезъ s—мѣру поверхности шароваго пояса, черезъ h—высоту пояса и черезъ R—радіусъ шара, будемъ имѣть:

$$s = 2\pi R \, . \, h.$$

Теорема 2. *Мѣра боковой поверхности шароваго отрѣзка* (сегмента) *равна длинѣ окружности большаго круга, умноженной на высоту отрѣзка.* То есть, означая черезъ σ—мѣру боковой поверхности шароваго отрѣзка, черезъ h—высоту отрѣзка, а черезъ R—радіусъ шара, будемъ имѣть:

$$\sigma = 2\pi R \, . \, h.$$

Мѣра полной поверхности шароваго отрѣзка получится, если къ σ прибавимъ мѣру площади основанія отрѣзка.

Измѣреніе объема шара и его частей.

§ 240. Опредѣленіе мѣры объема шара основано на слѣдующей теоремѣ:

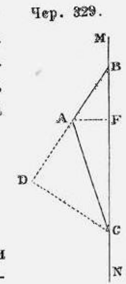
Теорема. *Если треугольникъ обращается около оси, которая лежитъ въ плоскости треугольника и проходитъ черезъ одну изъ его вершинъ, то мѣра объема происшедшаго тѣла вращенія равняется произведенію мѣры поверхности, описанной стороною, противулежащею сказанной вершинѣ, на треть высоты треугольника, соотвѣтствующей той же самой вершинѣ.*

Означимъ чрезъ V мѣру объема искомаго тѣла вращенія и разсмотримъ три случая отдѣльно:

1-й случай. Пусть одна изъ сторонъ BC треугольника ABC (чер. 329) находится на оси вращенія MN.

Проведемъ высоту CD треугольника ABC, соотвѣтствующую вершинѣ C, и докажемъ, что V = мѣрѣ повер., образованной прямою AB, $\times \frac{1}{3}$ CD.

Чер. 329.



Доказ. Опустимъ изъ A перпендикуляръ AF на ось вращенія MN, и замѣтимъ, что полученное тѣло вращенія состоитъ изъ двухъ конусовъ, имѣющихъ общимъ основаніемъ кругъ радіуса AF, и образующая одного — AB, а другаго—AC. Слѣд.

$$V = \pi AF^2 \, . \, \frac{BF}{3} + \pi AF^2 \, . \, \frac{FC}{3} =$$

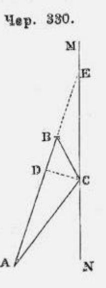
$$= \pi AF^2 \, . \, \frac{(BF+FC)}{3} = \pi AF^2 \, . \, \frac{BC}{3}.$$

Но двойная площадь $\triangle$ABC выражается или черезъ произведеніе AF . BC или черезъ произведеніе CD . AB, поэтому AF . BC = CD . AB, откуда

$$V = \frac{1}{3} \pi AF . AB . CD.$$

Такъ какъ πAF . AB есть мѣра боковой поверхности конуса, происшедшаго отъ вращенія прямой AB около MN, то V = мѣрѣ повер., образованной прямою AB, $\times \frac{1}{3}$ CD.

Чер. 330.



2-й случай. Пусть данный треугольникъ ABC (чер. 330) имѣетъ одну только вершину на оси вращенія MN и продолженіе стороны AB, противулежащей этой вершинѣ, пересѣкаетъ MN въ какой нибудь точкѣ E. Требуется доказать, что и въ этомъ случаѣ

V=мѣрѣ повер., описанной прямою $AB, \times \frac{1}{3} CD$.

Доказ. Объемъ тѣла, полученнаго отъ обращенія треугольника ABC около оси MN, равенъ разности объемовъ тѣлъ, полученныхъ отъ вращенія $\triangle ACE$ и $\triangle BCE$. Означая черезъ v_1 и v_2 мѣры объемовъ послѣднихъ тѣлъ, имѣемъ по предыдущему:

v_1=мѣрѣ поверхности, образованной прямою $AE, \times \frac{1}{3} CD$;

v_2=мѣрѣ поверхности, образованной прямою $BE, \times \frac{1}{3} CD$.

откуда $v = v_1 - v_2 =$

= мѣрѣ поверхности, образованной прямою $AB, \times \frac{1}{3} CD$.

3-й случай. Пусть данный треугольникъ ABC (чер. 331) имѣетъ вершину C на оси вращенія MN и сторона AB, противулежащая этой вершинѣ, параллельна этой оси. Требуется доказать, что

Чер. 331.

v=мѣрѣ повер., образованной прямою $AB, \times \frac{1}{3} CD$.

Доказ. Мѣра объема тѣла, полученнаго отъ вращанія даннаго треугольника ABC около оси MN, равняется мѣрѣ объема цилиндра, образующая котораго есть сторона AB, и радіусъ основанія—высота CD треугольника ABC, безъ суммы мѣръ объемовъ двухъ конусовъ, образующія которыхъ суть стороны AC и BC. Означая черезъ v_1, v_2 и v_3 мѣры объемовъ этихъ трехъ тѣлъ послѣдовательно, имѣемъ:

$$v_1 = \pi CD^2 . AB$$

$$v_2 = \pi AE^2 . \frac{EC}{3} = \pi CD^2 . \frac{EC}{3}$$

$$v_3 = \pi BF^2 . \frac{CF}{3} = \pi CD^2 . \frac{CF}{3}, \quad \text{откуда}$$

$$v = v_1 - (v_2 + v_3) = \pi CD^2 . AB - \left(\pi CD^2 . \frac{EC}{3} + \pi CD^2 . \frac{CF}{3}\right) =$$

$$= \pi CD^2 . \left(AB - \frac{1}{3} EF\right) = \pi CD^2 . \frac{2}{3} AB.$$

Такъ какъ $2\pi CD . AB$ есть мѣра поверхности цилиндра, образующая котораго — AB, то имѣемъ:

v = мѣрѣ поверхности, описанной прямою $AB, \times \frac{1}{3} CD$.

§ 241. **Теорема.** *Мѣра объема тѣла вращенія, образованнаго движеніемъ половины правильнаго многоугольника съ четнымъ числомъ сторонъ около оси, проходящей черезъ центръ и черезъ вершины противулежащихъ угловъ многоугольника, равна произведенію мѣры поверхности этого тѣла вращенія на треть радіуса вписаннаго шара.*

Чер. 332.

Около круга радіуса R описанъ правильный многоугольникъ съ четнымъ числомъ сторонъ. Отъ обращенія этого полукруга вмѣстѣ съ полумногоугольникомъ около оси AF (чер. 332) получится шаръ и описанное около него тѣло вращенія. Требуется доказать, что мѣра объема U этого тѣла вращенія равна

$2\pi R \Delta . \frac{R}{3}$, гдѣ Δ есть длина оси AF.

Доказ. По предыдущей теоремѣ имѣемъ: Мѣра объема тѣла, котораго боковая поверхность образована прямою AB, = мѣрѣ повер., образ. $AB, \times \frac{R}{3}$

„ „ „ BC, = мѣрѣ повер., образ. $BC, \times \frac{R}{3}$

„ „ „ CD, = мѣрѣ повер., образ. $CD, \times \frac{R}{3}$

„ „ „ DE, = мѣрѣ повер., образ. $DE, \times \frac{R}{3}$

„ „ „ EF, = мѣрѣ повер., образ. $EF, \times \frac{R}{3}$.

Откуда мѣра объема U тѣла вращенія равна суммѣ мѣръ поверхностей, образованныхъ прямыми AB, BC, CD, DE, EF, т. е. равна мѣрѣ поверхности Σ всего тѣла вращенія, умноженной на треть радіуса шара, или

$$U = \Sigma . \frac{R}{3}, \quad \text{но} \quad \Sigma = 2\pi R . \Delta \ (\S\ 234);$$

слѣдов. $U = 2\pi R \Delta . \frac{R}{3} = \frac{2}{3} \pi R^2 . \Delta.$

§ 242. Въ произведеніи $\frac{2}{3}\pi R^2 . \Delta$ множитель $\frac{2}{3}\pi R^2$ — постоянное число, а множитель Δ—перемѣнное, уменьшающееся съ увеличиваніемъ числа сторонъ описаннаго полумногоугольника, образовавшаго тѣло вращенія, и имѣющее своимъ предѣломъ, какъ доказано въ § 235, діаметръ шара 2R. Если же Δ имѣетъ своимъ предѣломъ 2R, то $\frac{2}{3}\pi R^2 . \Delta$, то есть перемѣнная мѣра объема описаннаго тѣла вращенія, имѣетъ, по теоремѣ § 131, своимъ предѣломъ $\frac{2}{3}\pi R^2 . 2R$, или $\frac{4}{3}\pi R^3$ и другаго предѣла, по теор. § 130, имѣть не можетъ.

Опредѣленіе. *Мѣрою объема шара назыв. тотъ единственный предѣлъ, къ которому приближается мѣра объема описаннаго тѣла вращенія съ удвоеніемъ числа сторонъ полумногоугольника, образовавшаго это тѣло вращенія.*

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ

§ 243. **Теорема**. *Мѣра объема шара равняется мѣрѣ его поверхности, умноженной на треть радіуса шара.*

Означивъ черезъ V мѣру объема шара, чрезъ S—мѣру поверхности и черезъ R—радіусъ шара, будемъ имѣть: $V = S . \frac{R}{3}$; но $S = 4\pi R^2$ (§ 236), поэтому

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Слѣдствіе. Такъ какъ $R = \frac{D}{2}$, гдѣ D есть діаметръ шара, то

$$V = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

§ 244. **Теорема**. *Отношеніе объемовъ двухъ шаровъ равно отношенію кубовъ ихъ радіусовъ.* Такъ какъ всѣ шары подобны, то, означивъ чрезъ V и V′ мѣры объемовъ двухъ шаровъ, которыхъ радіусы R и R′, будемъ имѣть (§ 243)

$$\frac{V}{V'} = \frac{{}^4/_3\pi R^3}{{}^4/_3\pi R'^3} = \frac{R^3}{R'^3}.$$

§ 245. Изъ опредѣленія мѣры объема шара (§ 242) слѣдуетъ, что *мѣра объема шароваго вырѣзка (сектора) съ сегментнымъ основаніемъ, какъ части объема шара, отдѣленной отъ всего шара коническою поверхностью вырѣзка, есть предѣлъ, къ которому приближается мѣра части объема тѣла вращенія, ограниченной сказанною коническою поверхностью* въ то время, какъ мѣра объема всего тѣла вращенія приближается къ мѣрѣ объема всего шара.

Точно также *мѣра объема шароваго вырѣзка, основаніе котораго есть поясъ,—какъ части объема шара, заключенной между двумя коническими поверхностями вырѣзка, есть предѣлъ, къ которому приближается мѣра части объема тѣла вращенія, ограниченной сказанными коническими поверхностями* въ то время, какъ мѣра объема всего тѣла вращенія приближается къ мѣрѣ объема всего шара.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ:

§ 246. **Теорема**. *Мѣра объема всякаго сферическаго вырѣзка (сектора) равна произведенію мѣры поверхности отрѣзка или мѣры поверхности пояса, соотвѣтствующей сферическому вырѣзку и служащей ему основаніемъ, на треть радіуса шара.* Т. е. означая чрезъ q—мѣру объема вырѣзка, чрезъ h—высоту сферическаго отрѣзка или слоя, соотвѣтствующаго вырѣзку, и чрезъ R — радіусъ шара, будемъ имѣть:

$$q = 2\pi Rh . \frac{R}{3} = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

§ 247. **Теорема I**. *Мѣра объема шароваго отрѣзка равна половинѣ произведенія мѣры площади его основанія на высоту, сложенной съ мѣрою объема шара, діаметръ котораго равенъ высотѣ отрѣзка.*

Означимъ черезъ V мѣру объема шароваго отрѣзка (сегмента) ANBF (чер. 333), черезъ r—радіусъ BF основанія его; черезъ h — высоту NF отрѣзка, и докажемъ, что

$$V = \frac{\pi r^2 h}{2} + \frac{\pi h^3}{6}.$$

Чер. 333.

Доказ. Объемъ отрѣзка ANBF равенъ объему вырѣзка ANBO безъ объема конуса OAB. Означая радіусъ шара черезъ R, будемъ имѣть:

мѣра объема вырѣзка ANBO $= \frac{2}{3}\pi R^2 h$,

мѣра объема конуса OAB $= \frac{\pi r^2}{3}(R-h)$:

слѣдов.

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{\pi}{3} r^2 (R-h) = \frac{\pi}{3}(2R^2 h - Rr^2 + hr^2);$$

но изъ $\triangle AOF$ имѣемъ:

$$R^2 = (R-h)^2 + r^2 \quad \text{или} \quad 2Rh = h^2 + r^2, \text{ откуда}$$

$$R = \frac{h^2+r^2}{2h}.$$

Подставивъ въ выраженіе V на мѣсто R его величину, получимъ:

$$V = \frac{\pi}{3}\left\{2\frac{(h^2+r^2)^2 h}{4h^2} - \frac{h^2+r^2}{2h} r^2 + hr^2\right\} =$$

$$= \frac{\pi r^2 h}{2} + \frac{\pi h^3}{6}.$$

Теорема 2. *Мѣра объема шароваго слоя равна произведенію полусуммы мѣръ его основаній на высоту, сложенному съ объемомъ шара, діаметръ котораго равенъ высотѣ слоя.*

Означимъ черезъ V мѣру объема сферическаго слоя ABDC, черезъ r и r_1—радіусы BF и GD основаній его, черезъ H—высоту слоя, и докажемъ, что

$$V = \frac{\pi r^2 + \pi r_1^2}{2} . H + \frac{\pi H^3}{6}.$$

Доказ. Объемъ сферическаго слоя ABDC равенъ объему отрѣзка CNDG безъ объема отрѣзка ANBF. Означивъ высоту перваго отрѣзка черезъ h_1, втораго—черезъ h, будемъ имѣть:

$$V = \left(\frac{\pi r_1^2 h_1}{2} + \frac{\pi h_1^3}{6}\right) - \left(\frac{\pi r^2 h}{2} + \frac{\pi h^3}{6}\right) \quad \text{или}$$

$$V = \frac{\pi}{2}(r_1^2 h_1 - r^2 h) + \frac{\pi}{6}(h_1^3 - h^3) \qquad (1).$$

Означивъ радіусъ шара черезъ R, изъ $\triangle ODG$ и $\triangle OBF$ получимъ:

$$R = \frac{h_1^2 + r_1^2}{2h_1} \quad \text{и} \quad R = \frac{h^2+r^2}{2h}; \qquad \text{откуда}$$

$$\frac{h_1^2 + r_1^2}{h_1} = \frac{h^2+r^2}{h} \quad \text{или} \quad h_1^2 h + r_1^2 h = h^2 h_1 + r^2 h_1.$$

$$\text{или} \quad r^2 h_1 = r_1^2 h + hh_1 (h_1 - h) \qquad (2).$$

Изъ чертежа видно, что $h_1 - h = H$ или $h_1 = H + h$; поэтому, вставя въ первый членъ равенства (2) вмѣсто h_1, и въ послѣдній членъ того же равенства вмѣсто $h_1 - h$ ихъ величины, получимъ

$$r^2 . (H+h) = r_1^2 h + hh_1 H \qquad \text{или}$$

$$r^2 h = r_1^2 h - r^2 H + hh_1 H.$$

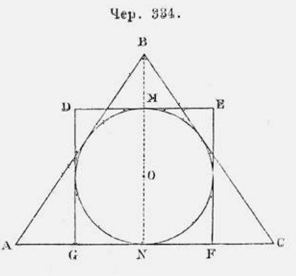
Возведя въ кубъ обѣ части равенства $h_1 - h = H$, найдемъ, что

$$h_1^3 - h^3 = H^3 + 3hh_1 H.$$

Вставимъ въ равенство (1) выраженія $r^2 h$ и $h_1^3 - h^3$ и будемъ имѣть

$$V = \frac{\pi r^2 + \pi r_1^2}{2} . H + \frac{\pi H^3}{6}.$$

Замѣчаніе. Если радіусъ одного изъ основаній шароваго слоя, напр. r, положимъ равнымъ нулю, то слой обратится въ шаровой отрѣзокъ и послѣдняя формула въ выведенную нами формулу шароваго отрѣзка.



§ 248. **Задача.** *Около круга* O (чер. 334), *радіусъ котораго* r, *описанъ квадратъ* DEFG *и равносторонній треугольникъ* ABC, *основаніе* AC *котораго совпадаетъ съ стороною* GF *квадрата. Опредѣлить отношеніе поверхностей и объемовъ шара, цилиндра и конуса, происшедшихъ отъ обращенія круга, квадрата и треугольника около высоты* BN *треугольника, причемъ за основаніе треугольника принята сторона* AC, *совпадающая съ стороною* GF *квадрата.*

Рѣш. Означимъ черезъ S мѣру поверхности шара, черезъ S′ и S″—мѣры полныхъ поверхностей, описанныхъ около этого шара цилиндра и конуса, и будемъ имѣть

$$S = 4\pi R^2 \ (§\ 236),$$

$$S' = 2\pi GN.(EF + GN) = 2\pi R(2R + R) = 6\pi R^2 \text{ (§ 209)},$$

$$S'' = 2\pi AN.\left(\frac{AB + AN}{2}\right) = 2\pi R\sqrt{3}\,.\,\frac{(2R\sqrt{3} + R\sqrt{3})}{2} = 9\pi R^2$$

(§ 219), потому что $AB = 2R\sqrt{3}$ (§ 116, теор. 1, слѣд. 2).

Взявъ отношеніе S къ S′ и отношеніе S′ къ S″, получимъ

$$\frac{S}{S'} = \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \frac{S'}{S''} = \frac{2}{3}, \quad \text{откуда}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{S'}{S''},$$

т. е. *полная поверхность цилиндра есть среднее пропорціональное между поверхностью шара и полною поверхностью конуса.*

Означимъ чрезъ V — мѣру объема шара, чрезъ V′ и V″ — мѣры объемовъ цилиндра и конуса, и будетъ имѣть

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{(§ 243)},$$

$$V' = \pi GN^2.EF = \pi R^2.2R = 2\pi R^3 \text{ (§ 212)}.$$

$$V'' = \pi AN^2.\frac{BN}{3} \text{ (§ 222)}, \quad \text{но}$$

$$AN = \frac{AB}{2} = \frac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3} \quad \text{и} \quad BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} =$$

$$= \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{AB}{2}\sqrt{3} = \frac{2R\sqrt{3}}{2}\sqrt{3} = 3R,$$

поэтому $V'' = 3\pi R^3$.

Взявъ отношеніе v къ v' и отношеніе v' къ v'', получимъ

$$\frac{V}{V'} = \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \frac{V'}{V''} = \frac{2}{3}, \quad \text{откуда}$$

$$\frac{V}{V'} = \frac{V'}{V''},$$

т. е. *объемъ цилиндра есть среднее пропорціональное между объемомъ шара и объемомъ конуса.*
